Dr hab. inż. Remigiusz Augusiak
Centrum Fizyki Teoretycznej
Polskiej Akademii Nauk
Al. Lotników 32/46, 02-668 Warszawa

Warszawa, 06.05.2022

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Mahaswety Pandit
'Characterization of quantum correlations with strong non-classical properties'

Uwagi ogólne. Rozprawa pt. *'Characterization of quantum correlations with strong non-classical properties'* została przygotowana na Uniwersytecie Gdańskim pod kierunkiem prof. Wiesław Laskowski i dr. Waldemara Kłobusa. Ma 123 strony i składa się z krótkiego wprowadzenia do dziedziny, w którym nakreślono również problem badawczy podejmowany w rozprawie oraz cztery rozdziały przedstawiające oryginalne wyniki naukowe. Pierwsze trzy z tych rozdziałów oparte są na artykułach, których współautorem jest mgr Pandit. Zostały one opublikowane w dobrych czasopismach naukowych, takich jak *Physical Review A* czy *New Journal of Physics.* Ostatni rozdział zawiera kilka nowych wyników, które nie zostały jeszcze opublikowane. Rozprawa jest napisana w języku angielskim na dobrym poziomie, choć jest w niej wiele błędów językowych, głównie dotyczących przedimków i rozróżnienia między liczbą pojedynczą a mnogą. Ponadto, choć każdy rozdział kończy się krótkim podsumowaniem, myślę, że w rozprawie brakuje ogólnego podsumowania, nakreślającego również możliwe kierunki dalszych badań.

Wyniki. Rozprawa dotyczy wielocząstkowych układów kwantowych, a w szczególności pewnych form nieklasyczności charakteryzujących takie układy, takich jak splątanie czy nielokalność Bella. Jest to bardzo aktualny i interesujący przedmiot badań. Z jednej strony wielocząstkowe stany kwantowe i powyższe formy nieklasyczności pozwalają uzyskać przewagę nad metodami klasycznymi w wielu zastosowaniach, takich jak np. badana w pracy metrologia kwantowa czy rozwijające się prężnie w ostatnich latach obliczenia kwantowe. Z drugiej strony charakteryzacja wielocząstkowych układów kwantowych jest również bardzo interesującym problemem z fundamentalnego punktu widzenia, ponieważ układy tego typu to doskonały obszar do testowania jak daleko teoria kwantów odbiega od fizyki klasycznej i jakie są jej ograniczenia. W swojej pracy magisterskiej mgr Pandit bada kilka aspektów wielocząstkowych układów kwantowych i przedstawia szereg cennych wyników, które opiszę bardziej szczegółowo poniżej.

Rozdział 1. Pierwszy rozdział poświęcony jest tzw. stanom k-jednorodnym, czyli N-podukładowym stanom kwantowym, których każda redukcja k-podukładowa jest opisywana stanem maksymalnie mieszanym. Uogólniają one tzw. stany absolutnie maksymalnie splątane (ang. *absolutely maximally entangled*), które są zasobem dla pewnych zastosowań w informacji kwantowej i dlatego były intensywnie badane w ostatnich latach. Wiadomo jednak, że czyste stany k-jednorodne nie istnieją dla każdej konfiguracji liczb k, N i d—wymiaru lokalnej przestrzeni Hilberta, co daje motywację do poszukiwania mieszanych stanów k-jednorodnych. Tym właśnie problemem zajmuje się mgr Pandit w pierwszym rozdziale swojej rozprawy. Podaje ona dość ogólną metodę pozwalającą na konstrukcję k-jednorodnych stanów mieszanych o najwyższej czystości. Metoda ta jest oparta na formalizmie stabilizatorów znanego ze swojej użyteczności w kwantowej korekcji błędów oraz dwóch

RA

metodach numerycznych: jednej nieliniowej i drugiej wykorzystującej programowanie półokreślone (SDP). Formalizm stabilizatorów służy jako punkt wyjścia do poszukiwania dobrych kandydatów dla stanów k-jednorodnych, podczas gdy metody numeryczne służą do wykazania, że otrzymane stany mają najwyższą czystość lub do znalezienia innych stanów o wyższej czystości.

W oparciu o tę metodę podano kilka przykładów k-jednorodnych mieszanych stanów N-kubitowych dla N od 4 do 12 i różnych wartości k. Następnie gruntownie przebadane zostały własności otrzymanych stanów kwantowych. Po pierwsze, za pomocą innej metody numerycznej opartej na programowaniu półokreślonym, wprowadzonej w [65], sprawdzono, czy otrzymane stany są prawdziwie wielocząstkowo splątane (ang. *genuinely multipartite entangled*). Z drugiej strony zbadano ich użyteczność w zadaniu kwantowej estymacji fazy. Co ciekawe, równanie (1.69) implikuje, że czyste stany k-jednorodne (z k większym niż jeden), mimo że wykazują bardzo silne splątanie, nie są zasobem dla estymacji fazy wspomaganej kwantowo, ponieważ w tym przypadku kwantowa informacja Fishera skaluje się liniowo wraz z liczbą podukładów. Pokrótce omówiono również możliwość uogólnienia otrzymanych wyników do układów kwantowych o wyższym wymiarze lokalnym.

W mojej ocenie wyniki zaprezentowane w tym rozdziale są interesujące. Warto również podkreślić, że do ich otrzymania w ciekawy sposób powiązano wiele różnych pojęć i metod, takich jak formalizm stabilizatorów, tablice ortogonalne (ang. *orthogonal arrays*) czy programowanie półokreślone. Mam jednak kilka uwag, do których Kandydatka może się ustosunkować w czasie obrony:

1.1. Brakuje argumentu, dlaczego stan wynikający z algorytmu opartego na programowaniu półokreślonym przedstawionego na stronie 8 ma czystość nie mniejszą niż stan początkowy. Można taki argument znaleźć w publikacji, na której jest oparty ten rozdział, ale nie w rozprawie. Jednocześnie jest on kluczowy dla zaakceptowania otrzymanego stanu w kroku nr 3 owego algorytmu.

1.2. Myślę, że Autorka mogła dodać kilka zdań objaśniających znaczenie trzeciego warunku na stronie 9 (*'k-uniformity'*). Trzeba się chwilę zastanowić, aby zrozumieć jego znaczenie dla konstrukcji. Również rola drugiego warunku (*'independence'*) nie jest wprost wymieniona w konstrukcji, natomiast gwarantuje on, że wymiar podprzestrzeni stabilizowanej przez generatory wynosi dokładnie *2^{N-m}*; w rzeczywistości stan (1.17) jest unormowanym projektorem na tę podprzestrzeń.

1.3. Rola tablic ortogonalnych w znajdowaniu stanów k-jednostajnych nie jest dla mnie do końca jasna. Rozumiem, że pozwalają one zawęzić wszystkie elementy N-qubitowej grupy Pauliego do znacznie mniejszego zbioru, ale zabrakło mi argumentu, dlaczego prowadziłoby to do stanów k-jednorodnych i jaką rolę odgrywają tutaj liczby, które charakteryzują tablice ortogonalne takie jak ich indeks.

Rozdział 2. W następnym rozdziale przedstawiono nową wielkość—współzależność wielocząstkową (ang. *multipartite dependence*)—która pozwala na charakteryzację wielocząstkowych układów klasyczne lub kwantowe, jednak z nieco innej perspektywy niż standardowe miary korelacji wielocząstkowych. Z grubsza rzecz biorąc, określa ona ilościowo korzyść, jaką obserwatorzy osiągają ze współpracy w uzyskaniu informacji o podukładach pozostałych obserwatorów.

Miara ta jest definiowana w kategoriach (kwantowej) wzajemnej informacji i, co ważne, nie wiąże się z żadną skomplikowaną optymalizacją. Jest zatem wydajnie obliczalna niezależnie od wielkości układu, nawet w przypadku kwantowym, co umożliwia jej dogłębną charakteryzację. W szczególności, Kandydatka wyprowadza górne ograniczenia tej wielkości w przypadkach klasycznym i kwantowym, i podaje przykładowe stany kwantowe osiągające te ograniczenia. Warto zauważyć, że konstruując jeden z tych przykładów, mgr. Pandit ponownie zastosowała formalizm stabilizatorów użyty wcześniej w Rozdziale 1. Oprócz tego oblicza ona również współzależność wielocząstkową dla kilku przykładowych stanów i porównuje ją z innymi miarami korelacji wielocząstkowych. Okazuje się, że choć współzależność wielocząstkowa nie może być wykorzystana do bezpośredniej kwantyfikacji prawdziwie wielocząstkowych korelacji, to nadal posiada niektóre własności miar tego typu. Wreszcie Rozdział 2 podaje przykłady zadań, w których współzależność wielocząstkowa znajduje zastosowanie, takie jak kwantowe dzielenie sekretu (ang. *quantum secret sharing*).

Uwagi:

2.1. Zabrakło mi intuicyjnego wyjaśnienia, dlaczego współzależność wielocząstkowa może być wyższa dla stanów mieszanych niż dla stanów czystych.

2.2. W rozdziale brakuje definicji entropii Shannona czy von Neumanna, ani powiązanych wielkości, takich jak entropia warunkowa czy wzajemna informacja, zarówno w przypadku klasycznym, jak i kwantowym.

2.3. Nie jest jasne, dlaczego wartości własne w równaniach (2.24a) i (2.24b) nie zawierają symbolu Newtona, który występuje w równaniu (2.23).

Rozdział 3. Rozdział ten poświęcony jest kwantowej estymacji fazy, która jest doskonałym przykładem zadania, w którym wielocząstkowe (prawdziwe) splątanie jest potężnym zasobem pozwalającym pokonać metody klasyczne. Z tego powodu kwantowa estymacja fazy lub ogólniej metrologia kwantowa przyciąga w ostatnich latach wiele uwagi. W pracy Kandydatka rozważa ogólny i bardzo wymagający problem estymacji wielu faz oraz bada użyteczność pewnego układu wykorzystującego wielomodowy interferometr Macha-Zehndera do kodowania faz i pewne ustalone pomiary lokalne do ich estymacji. To znacząco upraszcza problem, ponieważ pozwala na użycie macierzy informacji Fishera zamiast jej kwantowej wersji, która uwzględnia optymalizację po pomiarach. Dodatkowo zakłada się, że jedna z faz, zwana fazą odniesienia, jest stała.

Kandydatka analizuje powyższy układ dla dwóch szczególnych przypadków trzech i czterech modów i wykazuje, że istnieją pewne wartości faz, dla których ślad macierzy informacji Fishera—wielkość opisująca precyzję estymacji faz—skaluje się kwadratowo z liczba cząstek, a tym samym osiąga granicę Heisenberga. Ponadto w przypadku trzech modów i ośmiu cząstek pokazano również, że istnieją całe regiony faz, w których wartość owego śladu jest zbliżona do wartości optymalnej. Oznacza to, że proponowana konfiguracja może być dobrą alternatywą dla innych układów zaproponowanych w literaturze, jeśli chodzi o uzyskanie przewagi kwantowej w metrologii. Omówiono również uogólnienia na większą liczbę modów oraz możliwość eksperymentalnej realizacji schematu.

Uwagi:

3.1. Myślę, że warto byłoby dodać w pracy jakieś intuicyjne wyjaśnienie, dlaczego schemat obejmujący większą liczbę modów w przypadku, gdy pewne fazy są ustalone jest lepszy od schematu obejmującego mniejszą liczbę modów, ale dowolnych faz. Warto zauważyć, że w badanych przypadkach, optymalne rozwiązania są wtedy, gdy fazy są sobie równe.

3.2. Sądzę też, że Autorka mogła dodać wyjaśnienie, dlaczego przedstawione rozważania ograniczają się do dwóch szczególnych przypadków trzy i czteromodowych. Czy można uogólnić otrzymane wyniki na dowolną liczbę modów?

Rozdział 4. Ostatni rozdział „badawczy" rozprawy dotyczy nielokalności Bella, a w szczególności prawdziwej nielokalności wielocząstkowej (ang. *genuine multipartite nonlocality*), która jest uważana za najsilniejszą formę tego typu korelacji charakteryzujących wielocząstkowe układy kwantowe. Rozważane są dwie definicje

RA

prawdziwej nielokalności wielocząstkowej: definicja wprowadzona przez Svetlichny'ego oraz ta z pracy [226]. Wykorzystując programowanie liniowe—kolejny rodzaj metod optymalizacji wypukłej—mgr Pandit podaje metody pozwalające na wyznaczenie dwóch wielkości określających nielokalność oraz prawdziwą nielokalność w wiecząstkowych układach kwantowych. Pierwsza z nich, zwana siłą łamania (ang. *strength of nonlocality*), to ilość białego szumu, powyżej której w konkretnym scenariuszu Bella (ze stałą liczbą pomiarów na stronę o ustalonej liczbie wyników) dany stan kwantowy nie jest już nielokalny ani prawdziwie nielokalny. Druga wielkość, zwana prawdopodobieństwem łamania (ang. *probability of violation*), to prawdopodobieństwo, że losowo wygenerowane pomiary lokalne mogą posłużyć do wytworzenia nielokalności lub prawdziwej nielokalności wielocząstkowej z danego stanu kwantowego. Obie wielkości są przydatne i interesujące w badaniu nielokalności Bella w układach wielu ciał, choć odzwierciedlają różne jej cechy: podczas gdy pierwsza określa ilościowo odporność nielokalności danego stanu kwantowego na mieszanie go z białym szumem, a zatem jest istotna z eksperymentalnego punktu widzenia, druga opisuje zdolność danego stanu do generowania nielokalności wielocząstkowej dla różnych wyborów lokalnych obserwabli.

Obie wielkości zostały następnie wyznaczone dla kilku czystych trzycząstkowych stanów kwantowych o lokalnym wymiarze dwa lub trzy, takich jak stany Dicke'go, częściowo splątane stany GHZ lub stan singletowy trzech qutritów. Na podstawie uzyskanych wyników sformułowano kilka cennych obserwacji, takich jak np. to, że dla stanów trzykubitowych prawdopodobieństwo łamania zarówno dla nielokalności, jak i prawdziwej nielokalności wielocząstkowej w ogólności rośnie wraz z liczbą pomiarów przypadających na obserwatora, choć istnieją znaczne różnice między wartościami uzyskanymi dla różnych definicji prawdziwej nielokalności, co można, przynajmniej częściowo, tłumaczyć tym, że definicja Svetlichny'ego jest bardziej restrykcyjna. Warto zauważyć, że prawdopodobieństwo łamania modeli bilokalnych bez sygnalizacji szybko rośnie do jednego dla wielu stanów, co wskazuje, że dla tych stanów w zasadzie dowolne zbiory lokalnych obserwabli przydatne do wykrycia prawdziwej nielokalności wielocząstkowej. Z drugiej strony, druga miara—maksymalna siła nielokalności—wydaje się rosnąć bardzo powoli wraz z liczbą pomiarów poza stanem *W*, dla którego występuje znaczący wzrost między przypadkami $m=3$ i $m=4$. Jednocześnie prawdopodobieństwo naruszenia dla wszystkich analizowanych stanów trzech kutrytów jest bardzo małe, ale znacznie wzrasta dla trzech pomiarów. Uważam, że te obserwacje są z pewnością cenne dla naszego zrozumienia wieloczęściowej nielokalności, ale mogą być również przydatne, jeśli chodzi o eksperymentalną implementacje testów Bella. Mam jednak kilka uwag:

4.1. W Tabeli 4.2 jest znacząca różnica S_{max} dla stanu *W* między przypadkami $m=3$ i $m=4$, co nie jest zgodne z typowym zachowaniem jakim wykazuje ta wielkość. Czy mgr Pandit mogłaby to skomentować podczas obrony?

4.2. Równania (4.27), (4.28) i (4.29) pokazują jak wyznaczyć maksymalną siłę nielokalności (4.12) dla danego zbioru rozkładów prawdopodobieństw za pomocą programowania liniowego, jednak w rozprawie nie wyjaśniono jak wyznaczyć tę samą wielkość dla stanów kwantowych. Wydaje się, że tutaj potrzebna jest dodatkowo optymalizacja po ustawieniach pomiarowych.

4.3. Wyrażenie „... powoduje stan możliwy do zrealizowania przy użyciu lokalnego modelu ukrytych zmiennych" jest nieco niefortunne, ponieważ modele ukrytych zmiennych odnoszą się do rozkładów prawdopodobieństwa, a nie do stanu kwantowego.

4.4. Nie zgodziłbym się ze stwierdzeniem zamieszczonym na stronie 95: *'all N-qubit states that are GME are also GMNL'*, przynajmniej nie w bezpośrednim sensie. Praca [224] przedstawia bowiem pewien sposób aktywacji prawdziwej nielokalności wielocząstkowej: korelacje tego typu mogą być wytworzone z *N*-1 kopii dowolnego stanu prawdziwie wielocząstkowo splątanego. Jednak pytanie, czy taki sam efekt zachodzi w standardowym scenariuszu Bell opartym na jednej kopii stanu kwantowego, pozostaje otwarte.

Konkluzja. Jest to wartościowa rozprawa, ponieważ prezentuje ona szereg oryginalnych wyników i metod, które przyczyniają się do pogłębienia naszego zrozumienia wielocząstkowych układów kwantowych i korelacji, jakie można w tych układach wytworzyć, takich jak wielocząstkowe splątanie czy nielokalność Bella. Największe wrażenie zrobiła na mnie metoda konstruowania *k*-jednorodnych stanów wielocząstkowych, która nie tylko rozwiązuje interesujący problem w teorii splątania, ale także łączy w ciekawy sposób kilka różnych koncepcji i metod, takich jak formalizm stabilizatorów, tablice ortogonalne oraz metody optymalizacji wypukłej (SDP i LP). Kolejnym pozytywnym aspektem pracy jest różnorodność obszarów informacji kwantowej, których ona dotyka takich jak teoria splątania, metrologia kwantowa czy teoria informacji. Z drugiej strony najsłabszym stroną rozprawy jest to, że w niektórych miejscach uzyskane wyniki nie są wyjaśnione w optymalny sposób. W rzeczywistości niektóre fragmenty pracy (poza rozdziałem 4) bardzo przypominają odpowiadające im publikacje, natomiast uważam, że pisanie pracy doktorskiej jest doskonałą okazją do zaprezentowania rozważań, które często są pomijane w artykułach. Nie umniejsza to jednak mojej ogólnej pozytywnej oceny pracy. Podsumowując, uważam, że spełnia ona wszystkie formalne i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim i stąd rekomenduję nadanie stopnia naukowego doktora mgr Mahaswecie Pandit.

Remigiusz Michał Augusiak

Elektronicznie podpisany przez Remigiusz Michał Augusiak
Data: 2022.05.06 09:41:09 +02'00'

Remigiusz Augusiak