Streszczenie rozprawy doktorskiej

mgr Marty Leśniak

pod tytułem **„Normalne generatory grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej”**

napisanej pod kierownictwem dr. hab. Błażeja Szepietowskiego, prof. UG

Grupą klas odwzorowań spójnej powierzchni zwartej F nazywamy grupę klas izotopii homeomorfizmów tej powierzchni równych identyczności na brzegu i zachowujących orientację, jeśli F jest orientowalna; oznaczamy ją $\mathcal{M}(F)$. Powierzchnię rodzaju g o n składowych brzegu oznaczamy $S_{g,n}$, jeśli jest orientowalna, i $N_{g,n}$, jeśli jest nieorientowalna. Jeżeli $n = 0$, pomijamy je, pisząc np. N_g. Klasy równoważności, które są elementami grupy, dziedziczą działanie grupowe po swoich reprezentantach. Grupa ta pełni ważną rolę w kilku działach matematyki, takich jak niskowymiarowa topologia, geometria algebraiczna, teoria funkcji zmiennej zespolonej czy geometryczna teoria grup.

Celem pracy jest zbadanie problemu generowania grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej przez sprzężenia jednego elementu, ze szczególnym uwzględnieniem elementów torsyjnych i z przykładami konkretnych zbiorów generujących. W Rozdziale 2 pokazujemy, że jedna transpozycja wstęg normalnie generuje całą grupę klas odwzorowań, czyli najmniejsza podgrupa normalna $\mathcal{M}(N_{g,n})$ zawierająca transpozycję wstęg jest równa całej grupie. Transpozycja wstęg jest to odwzorowanie powierzchni nieorientowalnej polegające na zamianie miejscami dwóch wstęg Möbiusa wzdłuż krzywej przecinającej je obie.

Prostym wnioskiem jest stwierdzenie, że istnieje zbiór generatorów grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej złożony wyłącznie z transpozycji wstęg; podajemy taki zbiór dla powierzchni z maksymalnie jedną składową brzegu. Jest to zaskakujący wynik, ponieważ wszystkie zbiory generujące $\mathcal{M}(N_{g,n})$ znane wcześniej są złożone z elementów dwóch różnych typów topologicznych (należących do dwóch różnych klas sprzężoności): twistów Dehna i y-homeomorfizmów lub transpozycji wstęg. W przypadku powierzchni orietowalnej na mocy wyników Dehna, Lickorisha i Mumforda grupa klas odwzorowań jest normalnie generowana przez jeden twist Dehna.

Kolejne wyniki, zawarte w Rozdziałach 3 i 4, dotyczą już elementów torsyjnych. Na mocy wyników Nielsena i Kerckhoffa każda torsyjna klasa odwzorowań $f \in \mathcal{M}(N_g)$ posiada reprezentanta o rzędzie równym rzędowi f. W Rozdziale 3 dowodzimy, dla $g \geq 7$, że domknięcie normalne dowolnego elementu torsyjnego rzędu co najmniej trzy zawiera podgrupę twistów, czyli podgrupę $M(N_g)$ indeksu dwa generowaną przez twisty Dehna. Jako wniosek podajemy przykład generatora normalnego $\mathcal{M}(N_g)$ dla $g \geq 7$.

Następnie przechodzimy do analizy inwolucji. Aby określić klasę sprzężoności inwolucji na powierzchni nieorientowalnej, potrzeba do sześciu niezmienników, wśród których znajdują się informacje o zbiorze punktów stałych reprezentanta standardowego inwolucji. Przyglądamy się dokładnie każdej możliwej inwolucji na N_g i znajdujemy warunki konieczne i wystarczające, aby jej domknięcie normalne zawierało podgrupę twistów. Następnie, wykorzystując ten wynik, wskazujemy inwolucję normalnie generującą $\mathcal{M}(N_g)$.

W Rozdziale 4 dowodzimy, że $M(N_g)$ jest generowana przez trzy sprzężone elementy torsyjne dla $g \geq 12$. Jest to pierwszy tak mały zbiór generatorów torsyjnych dla grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej. W pierwszym kroku przedstawiamy trzy wzajemnie sprzężone elementy rzędu g generujące grupy $\mathcal{M}(N_g)$ i $\mathcal{M}(N_{g+1})$ oraz ich podgrupy twistów. Zaletą uzyskanego twierdzenia jest niskie dolne ograniczenie rodzaju powierzchni i brak skomplikowanych warunków, a także stosunkowo prosty dowód. Następnie, dla ustalonego parzystego k, definiujemy trzy wzajemnie sprzężone elementy rzędu k, które normalnie generują $M(N_g)$, pod warunkiem, że g da się zapisać w postaci $a(k-1)+bk$ lub $a(k-1)+bk+1$, gdzie a jest nieujemną liczbą całkowitą, a b nieparzystą liczbą naturalną. Warunek ten jest spełniony dla dostatecznie dużych g.