

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Michała Banackiego.

Rozprawa doktorska mgr Michała Banackiego pt. „Symetrie wybranych struktur wypukłych w teorii informacji kwantowej” poświęcona jest analizie własności wybranych struktur matematycznych w dziedzinie, dynamicznie rozwijającej się w ostatnich latach, kwantowej informacji oraz ogólniejszych struktur, zwanych przez Autora rozprawą postkwantowymi, związanymi jednak konceptualnie ze strukturami kwantowymi.

Omawiana rozprawa, w istocie, składa się tematycznie z trzech części. Pierwszy rozdział i zarazem pierwsza część rozprawy jest dobrze zredagowanym zestawieniem definicji i twierdzeń z mechaniki kwantowej oraz teorii zbiorów wypukłych, które niezbędne w dalszej części rozprawy. Drugą tematycznie częścią rozprawy jest rozdział drugi opisujący własności podprzestrzeni i stanów D-symetrycznych. Trzecią, najobszerniejszą częścią rozprawy, stanowią pozostałe siedem rozdziałów, które zawierają opis własności korelacji kwantowych, lokalnych i niesygnalizowanych (rozdział trzeci i dziewiąty) oraz, w pozostałych rozdziałach, podobną konceptualnie analizę własności asamblaży wraz z analizą możliwości kwantowych realizacji ekstremalnych punktów asamblaży niesygnalizujących.

W rozdziale drugim przedstawiona jest nowa konstrukcja przestrzeni D-symetrycznej, będąca obrazem pewnego oryginalnie zdefiniowanego projektora działającego w iloczynie tensorowym n przestrzeni d wymiarowych przestrzeni zespolonych. W tej podprzestrzeni zdefiniowane zostały diagonalne stany D-symetryczne, będące nowym uogólnieniem diagonalnych stanów Dicke'a dla $d=2$. Dalsza część tego rozdziału zawiera analizę własności diagonalnych stanów D-symetrycznych ze szczególnym uwzględnieniem własności całkowitej separowalności. Zwieńczenie tego rozdziału jest tw.2.11, w którym podano warunki całkowitej separowalności, wyrażone poprzez uogólnioną własność PPT i równoważnie przez rozwiązanie uogólnionego problemu momentów. Wynik ten uważam za ciekawy i wartościowy gdyż wiąże on całkowitą separowalność stanów D-symetrycznych z uogólnionym problemem momentów i klasycznymi macierzami Hankela i podaje przykład stanów, dla których uogólnione PPT implikuje całkowitą separowalności a jak wiadomo w wyższych wymiarach nie jest łatwo takie związki wyprowadzać. Zwraca uwagę istotna rola pojawiającego się w tym zagadnieniu szeregu geometrycznego. W rozdziale tym podano także konstrukcje świadków splatania w przestrzeni D-symetrycznej, należy jednak zauważyć, że użyta w tych rozważaniach definicja świadka splatania różni się od standardowej definicji tych obiektów, co wymagałoby uzasadnienia w rozprawie.

Dalszej części rozprawy poświęcona jest obszernej analizie korelacji kwantowych i struktur zwanych asamblażami i dokładniej asamblażom kwantowym oraz niesygnalizowanym, które spełniając warunki związane z koncepcją czarnych skrzynek są na tyle ogólne, że dopuszczają scenariusze znajdujące się poza opisem kwantowym (postkwantowe) a także związkom pomiędzy tymi strukturami. Rozdział trzeci rozprawy, o charakterze raczej przeglądowym, zawiera opis i pewne własności korelacji opisujące scenariusze eksperymentu Bella. W szczególności bardzo ważnym dla dalszej części rozprawy jest tw. 3.9 o tym, że ekstremalne punkty w zbiorze korelacji niesygnalizowanych nie mogą mieć kwantowej realizacji. Wszystkie kolejne rozdziały rozprawy poświęcone są opisowi i analizie struktur, w których, w przeciwieństwie do zbiorów korelacji, jest możliwa kwantowa realizacja ekstremalnych stanów niesygnalizowanych. Kolejny, czwarty rozdział, wprowadza w teorie zbiorów, zwanych asamblażami, podane w nim zostały charakterystyki asamblaży kwantowych oraz

niesygnalizowanych. W szczególności opisane zostały własności topologiczne własności tych struktur wypukłości (np. zbiór $nsA(n, mk, d, E)$ jest zwartym zbiorem wypukłym), co stanowi jeden z punkt wyjścia do analiz w dalszych rozdziałach. W rozdziale piątym rozprawy, który wydaje się być konceptualnie najważniejszym rozdziałem tej części rozprawy, gdyż idea konstruowania kwantowych realizacji ekstremalnych punktów odpowiednich asambliży niesygnalizowanych zrealizowana w tym rozdziale a także istotne wyniki tego rozdziału są z powodzeniem stosowane w następnych rozdziałach. W rozdziale tym konstruktywnie rozwiązano kwantowej realizacji nie trywialnych punktów ekstremalnych pewnej klasy asambliży. Konstrukcja opiera się na oryginalnej definicji asambliży sztywnych w klasie asambliży czystych, które jak pokazano ogólnie są równocześnie punktami ekstremalnymi i eksponowanymi odpowiednich zbiorów asambliży niesygnalizowanych. Konstrukcja ta pozwoliła na, w istocie konstruktywny dowód istnienia kwantowych realizacji ekstremalnych asambliży czystych w pewnych trójpodukładowych asambliżach niesygnalizowanych. Dodatkowo dla tych struktur podano nierówności sterowania oraz zanalizowano zagadnienie samotestowania. W rozdziale szóstym, konceptualnie podobnym do poprzedniego, oryginalnie zdefiniowano, na podstawie własności wypukłości, asambliże krawędziowe, podano ich charakterystykę i pokazano, że asambliże krawędziowe mogą być realizowane kwantowo. W rozdziale tym wyróżnia się oryginalny wynik w tw. 6.12 stwierdzającego, iż kwantowe asambliże trójpodukładowe ze stanami rzędu co najmniej 3 nie mogą być krawędziowe. Kolejny rozdział siódmy zastosowaniem koncepcji asambliży do, mających podstawowe znaczenie w teorii informacji kwantowej, kanałów kwantowych dla których zdefiniowano asambliże kwantowe i niesygnalizujące. Ważnym wynikiem tego rozdziału jest pokazanie, że kwantowość i niesygnalizowalność asambliży kanałów jest równoważna kwantowości i niesygnalizowalności asambliży obrazów Choi elementów asambliży kanałów. Wynik ten jest ciekawy, a także praktyczny i jakkolwiek wydaje się intuicyjny, to jego dowód jest niełatwy. Praktyczność tego wyniku potwierdza Przykład 7.9 pokazujący możliwość kwantowej realizacji ekstremalnych punktów niesygnalizowanych asambliży kanałów. W rozdziale ósmym pokazano możliwość kwantowej realizacji nielokalnych punktów ekstremalnych w oryginalnie zdefiniowanych sekwencyjnych niesygnalizowanych asambliżach wielopodukładowych. Ostatni rozdział, dziewiąty, zawiera ciekawy rezultat pokazujący, że można zdefiniować zbiór korelacji niesygnalizujących, zwanych hybrydowymi, w którym są nielocalne punkty ekstremalne realizowalne kwantowo. Rezultat ten konstruktywnie nawiązuje do znanego (przedstawionego w tw. 3.9) wyniku, że w zbiorze wszystkich korelacji niesygnalizujących kwantowa realizacja punktów ekstremalnych jest niemożliwa.

Wypracowanie zeprezentowanych wyników wymagało dużej kultury matematycznej, w szczególności konceptualnej inwencji ale także zdolności wykonywania żmudnych przekształceń i rachunków. Potwierdzeniem tego są dowody twierdzeń 2.10, 5.4 6.12 czy 8.9, w szczególności robiące wrażenie, dowody twierdzeń 5.4 i 6.12 są na tyle złożone, iż wymagają rozłożenia ich na ciągi lematów, dzięki czemu stają się przystępniejsze. Redakcja tych dowodów potwierdza duży potencjał matematyczna Autora rozprawy. Zwraca uwagę bardzo efektywne zastosowanie różnych technik matematycznych, przede wszystkim z dziedziny teorii wypukłości, przestrzeni liniowych i analiz graficznych z efektywnym wykorzystaniem własności symetrii. Znajomość tej pierwszej dziedziny potwierdza wysoka kulturę matematyczna Autora rozprawy, gdyż jest to dziedzina, która łączy elementy teorii przestrzeni liniowych, topologii i analizy.

Uważam, że rozprawa wyróżnia się poziomem stosowanego w niej formalizmu matematycznego, w szczególności jakością dowodów trudnych twierdzeń.

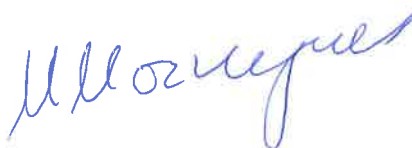
Wszystkie główne i oryginalne wyniki opisane w rozprawie uważam za ciekawe i wartościowe a także w większości trudne do udowodnienia. W szczególności dwa główne

wyniki rozprawy, koncepcję i charakterystykę stanów D-symetrycznych oraz efektywne zastosowanie idei kwantowej realizacji stanów ekstremalnych i eksponowanych asamblaży niesygnalizowanych uważam za wartościowy wkład do matematycznego formalizmu teorii informacji kwantowej. Sama idea nie jest nowa ale w rozprawie podano szereg oryginalnych i różnorodnych struktur, które ją realizują. Otrzymane wyniki i wypracowane metody stanowią dobry punkt wyjścia do dalszych badań.

Rozprawa jest starannie i przejrzysto napisana, chociaż autor nie ustrzegł się kilku drobnych błędów. Na stronie 23 w definicji działania permutacji sigma przy indeksach liczb i powinna być odwrotność permutacji sigma. Błąd ten nie jednak żadnego znaczenia, gdyż projektor symetryczny jest używany w rozprawie tylko w ogólnej postaci. Pozostałych kilka błędów, które zauważyłem to literówki bez znaczenia. Bibliografia jest dobrze i wyczerpująco podana.

Stwierdzam, że rozprawa mgr Michała Banackiego z nadmiarem spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie rozprawy do publicznej obrony.

Jak zaznaczyłem wyżej, ponieważ uważam, że rozprawa wyróżnia się poziomem stosowanego w niej formalizmu matematycznego, w szczególności jakością dowodów trudnych i ważnych twierdzeń, wnoszę również o wyróżnienie omawianej rozprawy.



Dr hab. Marek Mozrzyński, prof. UW