WYDZIAŁ MATEMATYKI i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Łódź, 6 września 2022 r.

Prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Łódzki
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź
e-mail: ryszard.pawlak@wmii.uni.lodz.pl

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

VARIOUS GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS OF THE SHARKOVSKY THEOREM ON COEXISTENCE OF PERIODIC ORBITS OF CONTINUOUS MAPPINGS

AUTOR: PAWEŁ BARBARSKI

PROMOTOR: DR HAB. PIOTR SZUCA
KOPROMOTOR: DR NIKODEM MROŻEK

Na stronie internetowej prof. Michała Misiurewicza (http://at.yorku.ca/t/a/i/c/41.htm) można znaleźć zdanie: *Combinatorial Dynamics has its roots in Sharkovsky's Theorem.* To ważne stwierdzenie podkreśla rolę i znaczenie tego twierdzenia w wielu rozważaniach matematycznych. Nic więc dziwnego, że wielu autorów budowało uogólnienia twierdzenia Szarkowskiego, przy czym prace prowadzone były w różnorodnych kierunkach. Odpowiednią literaturę sygnalizuje praca Doktoranta.

Praca doktorska p. Pawła Barbarskiego składa się z dwóch, dość odmiennych w swym charakterze, części. Pierwsza z nich (prace [A] i [B]) inspirowana artykułem J. Andresa *Randomization of Sharkovskii-type theorem*, dotyczy multifunkcji. Druga (artykuł [C]) została poświęcona rozwiązaniu pewnego problemu związanego z pierścieniami funkcji spełniających tezę twierdzenia Szarkowskiego.

Omówienie merytorycznych wyników zawartych w recenzowanej rozprawie podzielę, analogicznie jak Autor, na dwie części. Pierwsza z nich będzie dotyczyła rozdziału zatytułowanego *Randomization of Sharkovsky-type results*, druga - rozdziału *Rings of Sharkovsky functions*. W omówieniu pomijam części *Introduction* oraz *Preliminaries*, chociaż dalej zasygnalizuję pewne uwagi ich dotyczące.

Na wstępie chciałbym podkreślić, że p. P. Barbarski starannie przemyślał scalenie obu prac [A] i [B]. Świadczy o tym na przykład Definicja 2.8 (str. 15 w *Summary of the dissertation*). W pracy [A] rozważane są operatory mierzalne i losowe (Definicja 2.7 str. 416), a w pracy [B] badane są wyłącznie operatory losowe, których definicja (2.6 str. 1974) odpowiada operatorom mierzalnym z pracy [A]. Wspomniana Definicja 2.8 z części zasadniczej (*Summary of the dissertation*) odpowiada określeniu zamieszczonemu w artykule [B] i oczywiście jest związana z pojęciem używanym w pracy J. Andresa *Randomization of Sharkovsky-type theorem* (Definicja 3 str. 1387).

Innym faktem potwierdzającym dobre scalenie wyników obu prac jest połączenie na str. 16 – 17 Twierdzeń 3.1 i 3.2 oraz na str. 18-19 Twierdzeń 3.4 – 3.6, uzupełnionych Twierdzeniem 3.7 na str. 19-20 i odpowiednimi wnioskami na str. 20. W tym przypadku mam jednak pewną uwagę krytyczną, którą opiszę na przykładzie Theorem 3.5. Autor sugeruje, że jest to twierdzenie 4.1 z pracy [B], przy czym Twierdzenie 3.5 dopuszcza by dziedziną był przedział I, podczas, gdy Theorem 4.1 w pracy [B] zakłada, że dziedziną jest prosta R. Prawdopodobnie Autor zauważył, że teza pozostaje prawdziwa również w przypadku, gdy dziedziną jest I (do tego faktu powrócę w dalszej części recenzji).

Głównym celem prac [A] i [B] było (używając terminologii z recenzowanej dysertacji) uogólnienie pewnych twierdzeń z pracy J. Andresa „z zakresu randomizacji twierdzenia Szarkowskiego" (cytat str. 9-10). Warto w tym miejscu zacytować zapis ze str. 6. *As a tool for proving the randomized generalizations of the theorem we use the characterizations of random operators having a periodic random orbit, a tool firstly proposed and applied in [1]. These type of characterization is called transformation to deterministic case, since we express the existence of a random orbit through the existence of the "deterministic" orbits.*

W obu pracach autor dąży do wyników o podobnej strukturze, ale nie można powiedzieć, że są one identyczne lub, że jedną z tych prac można łatwo zastąpić drugą. Poniżej opiszę przykładowe różnice rozważań zawartych w tych pracach.

Twierdzenie Szarkowskiego oraz większość jego uogólnień dotyczy funkcji, multifunkcji i operatorów ciągłych lub bliskich pojęciu ciągłości (np. w cytowanej pracy P. Szucy [14] są to funkcje o wykresie spójnym i typu G_δ). W pracy [A], w głównych twierdzeniach, Autor zakłada ciągłość (Twierdzenia 3.4, 4.2, 4.4) i korzysta z twierdzenia Kuratowskiego, Ryll-Nardzewskiego o mierzalnej selekcji. Bardzo ważna w tych rozważaniach jest ciągłość funkcji $d_{\varphi,k,m}$, a zatem, w kontekście Lemma 3.2 (str. 417), ciągłość i mierzalność operatora φ. Ponadto w twierdzeniach o rozkładzie w pracy [A] Autor rozważa przestrzenie polskie.

Inny kierunek rozważań pojawił się w pracy [B]. Rozważana jest tam dolna i górna półciągłość, przy czym jedynie w przypadku dolnej półciągłości mamy „pełną tezę twierdzenia Szarkowskiego" (Twierdzenie 4.1 str. 1977). Twierdzenie 4.3 (str. 1977) ma tezę twierdzenia Szarkowskiego z pewnymi ograniczeniami. W tej pracy Autor korzysta z wyniku S. J. Leese (Proposition 2.4 str. 13 w *Summary of the dissertation* oraz Lemma 2.1 str. 1973 w [B]). W celu otrzymania głównych wyników wystarczy w tym przypadku mierzalność $d_{\varphi,k,m}$, a w odniesieniu do rozkładów, Autor korzysta z przestrzeni Suslina. Można powiedzieć, że w pracy [B] osłabiono ciągłość na rzecz dolnej i górnej półciągłości, ale za cenę rozważania rodziny Suslina jako σ-ciała.

Należy dodatkowo zwrócić uwagę, że w [A] rozważane są przestrzenie L^p, a pracę [B] kończą interesujące rozważania dotyczące inkluzji różniczkowych.

Można oczywiście dalej wskazywać różnice (np. w pracy [A], przestrzeń to prosta rzeczywista lub odcinek, a w artykule [B] tylko prosta), ale nie są to różnice istotne. Na marginesie, wydaje się, że zarówno w [A], jak i w [B] można byłoby rozważać po prostu niejednoelementowe przedziały domknięte.

Autor rozprawy podkreśla, że inspiracją do podjęcia badań była praca J. Andresa i w ślad za nią stosuje „transformation to deterministic case" (np. Abstract w pracy [A]). Ważne jest jednak odnotowanie, że p. P. Barbarski nie wzorował się biernie na zapisach stosowanych w pracy [1], choć niektóre sformułowania są analogiczne lub wręcz równoważne. Przykładem może być definicja k-orbity. W pracach [A] i [B] jest taka sama definicja i wydaje się ona zbieżna z określeniem J. Andresa w [1], przy czym ujęcie w tej rozprawie jest zapisane precyzyjnym językiem matematycznym (w pracy [1] użyte zostało bardziej opisowe sformułowanie w punkcie (ii) definicji k-orbity na str. 1386).

Pewne idee w pracach [A] i [B] są wzorowane na [1]. Należy jednak podkreślić, że nie jest to powielanie metod z pracy J. Andresa, a raczej twórcze ich rozwinięcie. Podam przykład. W obu pracach [A] i [B] rozumowania są prowadzone z wykorzystaniem funkcji $d_{\varphi,k,m}$. Pierwsza część określenia tej funkcji jest identyczna z definicją funkcji d_m w pracy [1] (Lemma 1 str. 1387). Paweł Barbarski wprowadza pewne „uzupełnienie" i jest to zabieg istotny dla prowadzonych rozważań. Najkrócej, w pracy [A] Autor wykorzystuje twierdzenie wymagające słabej mierzalności multifunkcji, podczas, gdy w [1] wykorzystywane jest twierdzenie zakładające mierzalność wykresu. Oczywiście w tle rozważań są funkcje $D_{\varphi,k,m}$, które, moim zdaniem, pozwalają uzyskać w prosty sposób efekty analogiczne do tego co można odczytać z rozważań zawartych w [1] od str. 1389[1].

Należy również podkreślić interesujące włączenie ideałów do rozważań zawartych w [A] i [B].

Podsumowując, uważam, że prace [A] i [B] zawierają interesujące rezultaty pogłębiające wiedzę w zakresie tej tematyki. Prace te są uzupełnione oryginalnymi wynikami dotyczącymi przestrzeni L^p w pracy [A] oraz inkluzjami różniczkowymi w pracy [B].

Przejdziemy teraz do analizy pracy [C].

Punktem wyjścia do rozważań zawartych w tym artykule był Problem 2 z pracy [11] (numeracja z *Summary of the dissertation*). Należy podkreślić, że p. Piotr Barbarski twórczo rozwinął to zagadnienie, modyfikując również sam problem. Do ostatecznego rozwiązania (Twierdzenie 7.3 str. 96 w [C]) prowadzą wyraźnie zasygnalizowane etapy pośrednie. Przykładem może być Corollary 4.5 (str. 87 w [C]), gdzie badanie ogranicza się do jednoelementowej rodziny złożonej z funkcji będącej identycznością. W tym miejscu zaskoczeniem dla mnie był fakt, że najmniejszy $\mathcal{A}$-pierścień generowany przez rodzinę złożoną z identyczności na zwartym przedziale, jest inny niż na prostej rzeczywistej. Pokazuje to pewną subtelność naukową, jaką musiał wykazać się Autor przy prowadzeniu badań.

Dalej rozważana jest jednoelementowa rodzina złożona z funkcji Darboux i ciekawe Twierdzenie 5.4 (str. 89-90 w pracy [C]). Nadal jednak wyniki dotyczą postaci całego, najmniejszego $\mathcal{A}$-pierścienia.

Część 6 omawianej pracy związana jest z rozkładem dziedziny funkcji oraz zbioru funkcji ciągłych w najmniejszych $\mathcal{A}$ -pierścieniach generowanych przez rodzinę złożoną z jednej funkcji Darboux. W tym kontekście szczególnie interesujące jest Twierdzenie 6.10, wykorzystywane później do dowodu głównego twierdzenia pracy.

W pracy tej, p. P. Barbarski ograniczył się do funkcji Darboux, których zbiór wartości jest przedziałem domkniętym, pozostawiając jako otwarty problem znalezienia $\mathcal{AR}(\{f\})\cap C$ w pozostałych przypadkach.

W pracy [11] postawiony problem dotyczył S-funkcji (definicja jest związana z ciągłością pierwszego powrotu) oraz $\mathcal{AS}$-pierścienia, który różnił się od $\mathcal{A}$ -pierścienia tym, że wszystkie funkcje z pierścienia musiały spełniać tezę Twierdzenia Szarkowskiego. Należy podkreślić, że zgodnie z Twierdzeniem 2.2 z [11] każda S-funkcja jest funkcją Darboux. Rozważając zatem funkcje $f \in$ D, Autor rozpatrywał ogólniejszą sytuację. Jednocześnie, ponieważ istota badań sprowadzała się do znalezienia rodziny funkcji ciągłych w rozważanych pierścieniach, więc dotyczyło to funkcji spełniających tezę twierdzenia Szarkowskiego.

Analizując pracę [C] uważam, że zawiera ona interesujące rezultaty, których uzyskanie wymagało poszukania niełatwych rozwiązań. Należy przy tym podkreślić, że narzędzia służące do uzyskania wyników były wyraźnie odmienne od stosowanych w pracy [11].

Na koniec rozważań ogólnych chciałbym podkreślić uczciwość naukową p. P. Barbarskiego. We wszystkich pracach wskazuje źródło swoich inspiracji nie tylko do tematyki badań, ale również w odniesieniu do poszczególnych fragmentów pracy (dowodów, twierdzeń, metod itp.). Świadczą o tym na przykład: komentarz przed Proposition 2.2 w pracy [A] (str. 415); utrzymanie tytułu części 3 pracy [A] takiego, jak w cytowanym artykule [2] wskazującego na analogiczność rozważań; czy też pierwsze zdanie dowodu Proposition 6.7 w pracy [C].

Przy czytaniu tych prac dostrzegłem również pewne usterki oraz niedoskonałości redakcyjne. Oczywiście te ostatnie mogą być wynikiem rozbieżności w postrzeganiu pewnych spraw przez Autora rozprawy oraz niżej podpisanego. Ze względu na to, że praca ta składa się głównie z artykułów już opublikowanych, nie widzę potrzeby wypisywania wszystkich uwag (które Autor mógłby wykorzystać przy redagowaniu prac do druku). Poniżej zasygnalizuję tylko niektóre z nich.

Moim zdaniem bardziej precyzyjnie można było wyjaśnić pojęcie „splitting". W pracy [A] jest ono używane lecz nie znalazłem definicji. Definicja tego pojęcia występuje w *Summary of the dissertation* i pośrednio w pracy [B] w kontekście definicji „nonatomic with respect to σ-ideal". Wydaje się, że celowe byłoby też zasygnalizowanie problemu rozłączności zbiorów tworzących rozkład.

Przy czytaniu „łączonych prac" dużą trudność sprawia używanie innej terminologii w odniesieniu do tych samych (lub analogicznych pojęć). Podam pewne przykłady.

W *Summary of the dissertation* (str. 15) oraz w pracy [B] (Definition 2.6 str. 1974) Autor nazywa *random operator* w odniesieniu do pojęcia *measurable operator* w pracy [A] (str. 416).

W pracy [A] Definicja 2.3 określa pojęcie „selector" (podobnie jak w *Summary of the dissertation*). W pracy [B] to samo pojęcie nazywane jest „selection" (str. 1973).

W pracy [A] na str. 415. Autor napisał: *Every measurable relation is weakly measurable (see Proposition 2.1).* Moim zdaniem celowe byłoby zaznaczenie, że w cytowanej pracy C. J. Himmelberga zakłada się doskonałą normalność rozważanych przestrzeni. Oczywiście w kontekście przestrzeni rozważanych w tej dysertacji skorzystanie z tego wyniku jest usprawiedliwione.

W związku z ostatnią uwagą chciałbym zauważyć, że w wielu miejscach Autor dość oszczędnie wyjaśnia związki między założeniami dotyczącymi przestrzeni wykorzystywanych w pracach z których korzysta, w kontekście własnych rozważań. Jako przykład może posłużyć Proposition 2.2 z pracy [A] i założenie σ-zwartości przestrzeni X. W dowodzie Autor korzysta np.

z Twierdzenia 6.2 pracy C. J. Himmelberga, w którym założona jest ośrodkowość przestrzeni. Oczywiście w recenzowanej dysertacji wykorzystywany jest również Corollary 4.2 z założeniem σ-zwartości, ale warto byłoby zamieścić krótkie wyjaśnienie odpowiednich zależności.

Na str. 417 w pracy [A] w określeniu $d_{\varphi,k,m}$ brakuje znaku ×.

Praca [B] str. 1979 – znaczenie symbolu \mathbb{Z} nie jest wyjaśnione, a wyjaśnione są symbole \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{I}.

W moim przekonaniu w pracy [B] na str. 1978 w czterech akapitach rozpoczynających się od wyrazu „Suppose" przydałoby się dokładniejsze wyjaśnienie.

W pracy [C] na str. 85 powinno być id_X (jest id), bo możliwość pomijania przestrzeni jest opisana dopiero w następnym zdaniu.

Uważam, że niektóre oznaczenia i zapisy mogłyby być dokładniej wyjaśnione lub zapisane. Przykładowo w pracy [A] na początku dowodu Theorem 3.4 (str. 418) zamiast *show the implication to the left* lepiej brzmiałoby użycie dostateczności, podobnie w pracy [C] (str. 88-89) dość mylące są zapisy „$\subseteq$" oraz „$\supseteq$", które wydają się być skierowane w nieodpowiednią stronę.

W pracy [C] na str. 85 Autor wprowadza aksjomaty definiujące $\mathcal{A}$ -pierścień numerując je liczbami z kropką (1. – 5.). W dowodzie Proposition 5.1 numery aksjomatów zapisuje w nawiasach okrągłych.

Wyraźnie brakuje przecinka po słowie „definition" na str. 93_8 (praca [C]).

Konkluzja. Uważam, że przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska p. P. Barbarskiego zawiera dużo oryginalnych i wartościowych wyników, których uzyskanie dowodzi dojrzałości matematycznej Doktoranta. Biorąc pod uwagę wszystkie wyżej przedstawione fakty stwierdzam, że rozprawa ta spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim i **wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego**.
Biorąc pod uwagę fakt, że Autor rozprawy udowodnił, iż potrafi rozszerzać badania związane z wynikami zawartymi w pracach uznanych naukowców, współpracować z tymi matematykami nad pogłębianiem dotychczasowych rezultatów, poszukiwać nietrywialnych zastosowań badanych zagadnień (np. inkluzje różniczkowe w pracy [B]) oraz atakować problemy postawione przez innych matematyków **wnioskuję** (pomimo dostrzeżonych usterek) **o uznanie tej pracy za wyróżniającą**.