

prof. dr hab. Władysław Wilczyński

Uniwersytet Łódzki

Wydział Matematyki i Informatyki

**Recenzja osiągnięcia naukowego oraz istotnej aktywności naukowej
dr. Marcina Szyszkowskiego**

Dr Marcin Szyszkowski wybrał ze swojego dorobku naukowego i przedstawił jako osiągnięcie naukowe pięć publikacji: *On axial maps of the direct product of finite sets*, Coll. Math. **75** (1998), 33-37; *A note on axial functions on the plane*, Tatra Mt. Math. Publ. **40** (2008), 59-62; *Axial continuous functions*, Topology and its Applications **157** (2010), 559-562; *Axial Borel functions*, Topology and its Applications **160** (2013), 2049-2052; *Axial functions*, Traditional and present-day topics in real analysis (Dedicated to Professor Jan Stanisław Lipiński), Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego 2013, 253-264.

Tematyka wszystkich prac dotyczy możliwości przedstawienia funkcji $F : X \times Y \rightarrow X \times Y$ jako złożenia funkcji osiowych $f(x, y) = (g(x, y), y)$ (funkcja pionowa) oraz $f(x, y) = (x, g(x, y))$ (funkcja pozioma). W pierwszej z nich Autor poprawia wynik A. Ehrenfeuchta i E. Grzegorka dowodząc, że jeśli zbiory X i Y są skończone, to wystarczy złożyć pięć funkcji osiowych (zewnętrzna może być pozioma). Istotną rolę odgrywa tu lemat 2 gwarantujący moc przeciwobrazów zbiorów jednopunktowych. W pracy [EG] (znacznie obszerniejszej) potrzeba było sześciu funkcji osiowych.

Druga praca poświęcona jest możliwości przedstawienia dowolnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ przy pomocy złożenia trzech funkcji osiowych, które są mierzalne oraz mają własność Baire'a, dodatkowo jeśli f jest borelowska, to mogą także być borelowskie. Autor uzyskuje pożądane własności poprzez użycie zbioru $\mathbb{R} \times C$ (C – zbiór Cantora), który jest miary zero i nigdzie gęsty w $\mathbb{R}^2$. Trzecia praca zawiera konstrukcję funkcji ciągłej $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$, która jest tożsamością na brzegu kwadratu oraz dowolne złożenie ciągłych funkcji osiowych jest oddalone od f (w metryce supremum) o co najmniej $\frac{1}{8}$. Wynik ten różni się od twierdzenia H.G. Egglestona z lat pięćdziesiątych mówiącego, że homeomorfizm kwadratu na siebie zachowujący punkty na brzegu może być aproksymatywny z dowolną dokładnością

przez złożenie homeomorfizmów osiowych. Kolejna praca zawiera m.in. dowód twierdzenia orzekającego, że dowolna permutacja borelowska $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ może być przedstawiona w postaci złożenia jedenastu osiowych permutacji borelowskich. W dowodzie zgręcznie użyto zbioru Cantora oraz własności rodziny zbiorów borelowskich. Wreszcie piąta praca ma w większości charakter przeglądowy, dotyczy wyników Autora i innych matematyków, uzupełniają ją proste przykłady.

Pozostały dorobek naukowy dr Marcina Szyszkowskiego, świadczący o jego istotnej aktywności naukowej składa się z ośmiu prac, wśród których pięć jest współautorskich. Również pięć prac zostało opublikowanych w *Real Analysis Exchange*, piśmie bardzo ważnym dla matematyków specjalizujących się w analizie rzeczywistej, lecz mało istotnym dla sporządzających w Ministerstwie Nauki wykaz czasopism punktowanych.

Większość tego dorobku (6 prac) poświęcona jest badaniu symetrycznych własności funkcji i zbiorów. Autor przeniósł twierdzenie Uhera orzekające, że funkcja symetrycznie ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła prawie wszędzie na funkcje określone na podzbiorach prostej oraz badał związek pochodnej symetrycznej z monotonicznością funkcji na składowych dziedzinie. Ciekawe wyniki dotyczą m.in. charakterystyki zbiorów

$$\begin{aligned} A(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \exists_{\{h_n\}} (h_n \searrow 0 \wedge f(x + h_n) - f(x - h_n) \rightarrow 0)\}, \\ B(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \exists_{\{h_n\}} (h_n \searrow 0 \wedge f(x + h_n) + f(x - h_n) - 2f(x) \rightarrow 0)\}, \\ C(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \exists_{\{h_n\}} (h_n \searrow 0 \wedge f(x + h_n) = f(x - h_n) = f(x))\}. \end{aligned}$$

Okazuje się, że dla dowolnego zbioru $E \subset \mathbb{R}$ istnieją funkcje f_1, f_2, f_3 takie, że $E = A(f_1)$, $E = B(f_2)$, $E = C(f_3)$. Siódma praca (wspólna z A. Maliszewskim) zawiera dowód twierdzenia: dla każdej funkcji rzeczywistej określonej na kole jednostkowym istnieje liczba y taka, że $f^{-1}(\{y\})$ ma składową o średnicy nie mniejszej niż $\sqrt{3}$. Wreszcie praca wspólna z A. Nowikiem i T. Weissem dotyczy ω_1 -granic zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{R}}$). $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{\bigcup_{\alpha < \aleph_1} \bigcap_{\beta \geq \alpha} A_\beta : A_\beta \in \mathcal{F}\}$ jest zbiorem ω_1 -granic zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$. Główny wynik pracy orzeka, że $\mathcal{L}(\sigma\text{-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a}) = 2^{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{cov}(\sigma\text{-ideał zbiorów miary zero}) = \aleph_1$. Dowody większości wyników są nietrywialne, wymagały pomysłowości. Autor rzadko cytuje wyniki W. Sierpińskiego, który badał zarówno funkcje, jak i zbiory symetryczne, a w ogóle nie cytuje F.M. Filipczaka, który jest

autorem prac o pochodnej symetrycznej. Wynik Z. Charzyńskiego cytowany jest poprzez monografię B.S. Thomsona, chociaż egzemplarz Fundamenta Mathematicae z roku 1933 jest łatwo dostępny.

Do merytorycznej recenzji nie należy ocena sposobu przygotowania dokumentacji, ale w tym przypadku mamy do czynienia z pewnym brakiem staranności. Wymienię tu: brak polskich liter w opisie udziału w konferencjach (Wochy, Sowacja, Wgry), pojawienie się słowa "później" w tekście angielskim oraz podwójny tytuł pracy w RAE 25 (2000): "various subsets" i "proper subsets".

Uważam, że wyniki dr. Marcina Szyszkowskiego stanowią wystarczającą podstawę do wystąpienia o nadanie stopnia doktora habilitowanego.

Władysław Włazny