

Autoreferat

Marcin Szyszkowski

1 Wykształcenie i praca zawodowa

- 1992 - magisterium na Uniwersytecie Gdańskim
- 2000 - doktorat na West Virginia University (USA), nostryfikowany w 2001 na Uniwersytecie Łódzkim

Dotychczasowe zatrudnienie

- 2000-2001 praca jako 'visiting professor' na Columbus State University, USA
- od 2001 pracuję na Uniwersytecie Gdańskim

2 Osiągnięcie habilitacyjne

Jako osiągnięcie przedstawiam cykl prac pod wspólnym tytułem

Funkcje osiowe

składa się ona z pięciu następujących prac:

- [S1] M. Szyszkowski, *On axial maps of the direct product of finite sets*, Colloq. Math. 75 (1998), 31-38.
- [S2] M. Szyszkowski, *A note on axial functions on the plane*, Tatra Mt. Math. Publ. 40 (2008), 59-62.
- [S3] M. Szyszkowski, *Axial continuous functions*, Topology Appl. 157 (2010), 559-562.
- [S4] M. Szyszkowski, *Axial Borel functions* Topology Appl. 160 (2013), 2049-2052 .
- [S5] M. Szyszkowski, rozdział *Axial functions* w książce *Traditional and present-day topics in real analysis*, Łódź 2013.

Jest to cykl prac ściśle związanych z zagadnieniem przedstawienia funkcji dwóch zmiennych jako złożenie funkcji osiowych. Opis tych prac jak i szerszego ich umocowania w następnym rozdziale.

2.1 Definicja

Definicja 1 Funkcja $f : X \times Y \rightarrow X \times Y$ jest osiowa gdy jest jednego z dwóch typów

$f(x, y) = (x, g(x, y))$ dla pewnej $g : X \times Y \rightarrow Y$ (f jest pionowa)
lub

$f(x, y) = (g(x, y), y)$ dla pewnej $g : X \times Y \rightarrow X$ (f jest pozioma).

Podstawowym pytaniem jest które odwzorowania f zbioru $X \times Y$ są złożeniem skończonej ilości odzorowań osiowych czyli czy $f = h_1 \circ \dots \circ h_n$, gdzie h_i są osiowe. Pytania te stawiali już Banach i Ulam w książce szkockiej. Później Ulam w [U] stawiał następne pytania, na niektóre udało mi się odpowiedzieć. Przeglądem wiadomości o funkcjach osiowych jest część pracy [S5].

2.2 Zbiory skończone

Na pytanie Ulama [U, VIII 2] czy każde odwzorowanie $f : X \times Y \rightarrow X \times Y$, gdzie X i Y są skończone, jest złożeniem skończonej ilości funkcji osiowych odpowiedź twierdzącą dali Ehrenfeucht i Grzegorek w pracy [EG]. Wynik z [EG] mówi, że by uzyskać dowolną funkcję $f : X \times Y \rightarrow X \times Y$ wystarczy złożyć sześć odzorowań osiowych, przy czym można zażądać by pierwsze było ustalonego typu np. pionowe.

W tejże pracy stawiają pytanie czy da się zmniejszyć liczbę sześć. W mej pracy [S1] zmniejszam tę liczbę do pięciu, przy czym nadal można żądać by pierwsza funkcja osiowa była np. pionowa.

W tej pracy podaję przykład odwzorowania (dla $|X| = 5$ i $|Y| = 4$) które nie jest złożeniem trzech odzorowań osiowych (później Grzegorek, patrz [P], znalazł podobny przykład dla $|X| = |Y| = 3$).

Płotka w [P] podał przykład funkcji $f : X \times Y \rightarrow X \times Y$ (gdzie $|X| = 3$ i $|Y| = 93(!)$), która nie jest złożeniem czterech funkcji osiowych o ile pierwszą funkcją osiową byłaby funkcją pionową (ale jest złożeniem 4 funkcji osiowych jeśli pierwsza jest pozioma).

Problem czy każda funkcja (dla skończonych X i Y) jest złożeniem czterech odwzorowań osiowych pozostaje nadal otwarty.

Innym rezultatem z [S1] (będącym lematem dla głównego wyniku o pięciu funkcjach) jest: dla dowolnej $f : X \times Y \rightarrow X \times Y$ istnieją osiowe funkcje h_1, h_2 i h_3 takie, że $|f^{-1}(x, y)| = |(h_3 \circ h_2 \circ h_1)^{-1}(x, y)|$ dla wszystkich $(x, y) \in X \times Y$. Tym razem liczby trzy nie można zmniejszyć.

Odnajdujemy na koniec ([EG]), że każda permutacja zbioru $X \times Y$ (dla skończonych X, Y) jest złożeniem tylko trzech permutacji osiowych (i można żądać by pierwsza była np. pionowa).

2.3 Zbiory nieskończone

Na pytanie Banacha [S, problem 47] czy każda permutacja zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da się uzyskać jako złożenie skończonej ilości permutacji osiowych twierdzącą

odpowieź dała Nosarzewska w [N]. Później w pracach [EG] i [G] uogólniono i wzmocniono ten rezultat i uzyskano twierdzenia:

Twierdzenie 2 [G] *Każda permutacja zbioru $X \times Y$, gdzie X lub Y jest nieskończony, jest złożeniem czterech permutacji osiowych (nie można jednak wymagać by pierwsza z nich była pozioma).*

Twierdzenie 3 [EG] *Każda funkcja zbioru $X \times Y$ w siebie, gdzie X lub Y jest nieskończony, jest złożeniem trzech funkcji (nie permutacji) osiowych.*

Obie liczby (cztery i trzy) są minimalne.

Odnajdujemy kontrast ze zbiorami skończonymi gdzie permutacje są złożeniem trzech permutacji osiowych a dla "niepermutacji" nadal nie wiadomo ile osiowych funkcji trzeba złożyć.

Dowód wyników z pracy [S4] można łatwo przerobić (uproszczyć) by uzyskać wynik, iż permutacje są kombinacją jedenastu permutacji osiowych. Wynik to oczywiście gorszy od powyższych, niemniej jednak jest to alternatywne rozwiązanie problemu Banacha.

Wart wspomnienia jest wynik Komjath'a z o przekształcaniu podzbiorów $G \times G$, gdzie G to abelowa grupa (nieskończona), za pomocą złożenia bardzo szczególnych permutacji osiowych - 'slide'ów' (patrz następna sekcja). Wynik ten mówi, że każdy zbiór $A \subset G \times G$ można przekształcić na inny zbiór $B \subset G \times G$ za pomocą dziesięciu 'slide'ów' o ile są spełnione (całkiem oczywiste) warunki: $|A| = |B|$ oraz $|G \times G \setminus A| = |G \times G \setminus B|$.

Praca Abert'a [A] także używająca 'slide'ów' zawiera wynik, że grupa permutacji nieskończonej grupy jest produktem skończonej ilości (289(!)) pewnych swych abelowych podgrup.

2.4 Płaszczyzna

Na pytanie Ulama [S, problem 20] czy homeomorfizm kwadratu można przybliżyć złożeniami homeomorfizmów osiowych twierdząco odpowiedział Eggleston następującymi twierdzeniami:

Twierdzenie 4 [E] *Każdy homeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest granicą punktową ciągu $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie f_n jest złożeniem osiowych homeomorfizmów.*

Twierdzenie 5 [E] *Niech $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ będzie homeomorfizmem którego jest identycznością na brzegu $[0, 1]^2$ i niech $\varepsilon > 0$. Istnieją wtedy homeomorfizmy osiowe $h_i : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$, $i = 1, \dots, n$, takie, że $\forall_{p \in [0, 1]^2} |h_n \circ \dots \circ h_1(p) - f(p)| < \varepsilon$.*

Zatem można dowolnie blisko przybliżyć (w normie supremum) homeomorfizm kwadratu przez złożenie skończonej ilości homeomorfizmów osiowych (nie można jednak ograniczyć tej ilości).

Choć Eggleston nie podaje takiego przykładu to można skonstruować homeomorfizm kwadratu, którego nie można uzyskać "dokładnie" jako złożenie skończenie wielu odwzorowań osiowych - patrz [S3].

Znając wyniki Egglestona, Ulam zapytał [U, IV 2] czy można twierdzenia 5 oraz 4 uogólnić na funkcje ciągłe (nie tylko homeomorfizmy). Tym razem odpowiedź jest negatywna, mianowicie w pracy [S3] mamy

Twierdzenie 6 *Istnieje funkcja ciągła $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ będąca identycznością na brzegu $[0, 1]^2$ której nie można przybliżyć w normie supremum skończonym złożeniem funkcji osiowych ciętych bliżej niż $\frac{1}{10}$.*

Innym pytaniem Ulama [U, IV 2] było pytanie czy można wszystkie permutacje (czyli izomorfizmy) borelowskie otrzymać jako złożenie permutacji borelowskich. To pytanie pojawiło się także w pracy [S2]. Odpowiedź twierdząca jest w pracy [S4]

Twierdzenie 7 *Każda permutacja borelowska płaszczyzny jest złożeniem 11 permutacji borelowskich osiowych. Dodatkowo można żądać, by pierwsza permutacja osiowa była pionowa.*

Liczba jedenaście zapewne nie jest minimalna.

Gdy pozwolimy by funkcje osiowe nie były permutacjami to sytuacja się niezwykle upraszcza

Twierdzenie 8 [S2] *Dowolna funkcja borelowska z płaszczyzny w płaszczyznę jest złożeniem tylko trzech funkcji borelowskich osiowych, przy czym można wymagać, by pierwsza funkcja osiowa była np. pionowa.*

Liczba trzy jest oczywiście minimalna. Jasnym jest także, że tutaj funkcje osiowe są dalekie od permutacji (nie są "na").

Odnajdujemy jeszcze wynik z [AK], że każda permutacja płaszczyzny jest złożeniem skończonej ilości (209 (!)) bardzo szczególnych permutacji osiowych - 'slideów' ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest 'slide' gdy istnieje $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x, y) = (x, y + g(x))$ lub $f(x, y) = (x + g(y), y)$). W pracy [S3] i [S4] odnosimy się do wyników z [AK].

2.5 Wyższe wymiary

Definicja 9 [EG] *Funkcja $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ jest osiowa jeśli istnieją $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz $g : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ spełniające*

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_1, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Twierdzenie 10 [EG] *Jeśli przynajmniej jeden ze zbiorów $X_1, \dots, X_n$ jest nieskończony to każda $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ jest złożeniem $n+1$ funkcji osiowych $f = f_{n+1} \circ \dots \circ f_1$.*

(wybór f_1 jest określony który z X_i ma największą moc)

Twierdzenie 11 [EG] *Dla dowolnych zbiorów $X_1, \dots, X_n$ (skończonych lub nie) i dowolnej permutacji $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ jest $k \in \mathbb{N}$ t.j. e $f = f_k \circ \dots \circ f_1$, gdzie f_i są osiowe.*

Powyżej funkcje osiowe mogą być "nieregularne", dla "regularnych" funkcji w przypadku $\mathbb{R}^n$ mamy tylko wyniki dla funkcji borelowskich.

Twierdzenie 8 można łatwo uogólnić na $\mathbb{R}^n$. Ciekawsze jest jednak twierdzenie z [S5] uogólniające twierdzenie 7

Twierdzenie 12 *Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem borelowskim, istieją wtedy izomorfizmy osiowe borelowskie h_i spełniające $f = h_k \circ \dots \circ h_1$ (dla pewnego k).*

Np. dla $n = 3$, $k \leq 22$, minimalne liczby k (w zależności od n) nie są znane.

Analog twierdzenia 5 dla $[0, 1]^3$ prawdopodobnie jest prawdziwy. Wydaje się, że twierdzenie Binga i Moise ([B],[M]) o przybliżaniu homeomorfizmów $[0, 1]^3$ homomorfizmami częściowo liniowymi może być przydatne.

Literatura

- [A] M. Abert, *Symmetric groups as product of abelian subgroups*, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 451-456.
- [AK] M. Abert, T. Keleti, *Shuffle the plane*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2) (2002), 549-553.
- [B] R.H. Bing, *An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated*, Ann. Mathematics 69 (1959), 37-65.
- [E] H. G. Eggleston, *A property of plane homeomorphisms*, Fund. Math. 42 (1955), 61-74.
- [EG] A. Ehrenfeucht, E. Grzegorek, *On axial maps of direct products I*, Colloq. Math. 32 (1974), 1-11.
- [G] E. Grzegorek, *On axial maps of direct products II*, ibid. 34 (1976), 145-164.
- [K] P. Komjath, *Five degrees of separations*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (8) (2002), 2413-2417.
- [M] E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds IV. Piecewise linear approximation ...*, Ann. Mathematics 55 (1952), 215-222.
- [P] K. Plotka, *Composition of axial functions of products of finite sets*, Colloq. Math. 107 (2007), 15-20.
- [N] M. Nosarzewska, *On a Banach's problem of infinite matrices*, Colloq. Math. 2 (1951), 192-197.
- [S] *The Scottish Book*, Edited by R. Mauldin, Birkhäuser, Boston 1981.
- [U] S. Ulam, *A collection of mathematical problems*, New York 1960.

3 Pozostałe prace

Większość prac poza rozprawą (choć nie wszystkie) dotyczy funkcji symetrycznie ciągłych i warunków pokrewnych, są to tematy związane z pracą doktorską.

Definicja 13 Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest symetrycznie ciągła w punkcie x gdy $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$.

Jak widać jest to warunek słabszy niż ciągłość niemniej jednak funkcje symetrycznie ciągłe mają wiele własności funkcji ciągłych.

W pracy [CS] dajemy przykład funkcji wszędzie symetrycznie ciągłej ale nie przeliczalnie ciągłej tj. prosta nie da się rozbić na przeliczalnie wiele zbiorów tak by na każdym ta funkcja była ciągła (jest to odpowiedź na pytanie Larsona z [CL]).

Prace [SD1] i [SD2] dotyczą funkcji symetrycznie ciągłych określonych na podzbiorach prostej, dowodzę tam, że jeśli dziedzina jest podzbiorem mierzalnym lub ma własność Baire'a to funkcja symetrycznie ciągła ma podobne własności jak funkcja określona na całej prostej (lub odcinku). Jednocześnie podaję przykłady niemierzalnych dziedzin gdzie te własności nie są zachowane.

Prace [SS1], [SS2] i [SS3] z kolei traktują o osłabieniu warunku symetrycznej ciągłości do warunku

Definicja 14 Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest słabo symetrycznie ciągła w punkcie x gdy istnieje ciąg $h_n \rightarrow 0$ oraz $\lim f(x+h_n) - f(x-h_n) = 0$.

Dowodzę, że dowolny podzbiór prostej może być zbiorem punktów słabej symetrycznej ciągłości dla pewnej funkcji. Praca [SS2] jest wzmocnieniem pracy [SS1]. Praca [SS3] jest z kolei wzmocnieniem [SS2] i odpowiada na pytanie Ciesielskiego, Nowika i Muthufel'a [CNM] wynikiem, że dowolny podzbiór prostej jest zbiorem punktów spełniających wzmocnienie warunku definicji 14:

istnieje ciąg $h_n \rightarrow 0$ t.ż. $\lim f(x+h_n) = \lim f(x-h_n) = f(x)$ dla pewnej funkcji f .

Ciekawy wynik zawiera się w topologicznej pracy [MS]. Mówi on, że jeśli rozbić dysk na płaszczyźnie o promieniu jeden na dwa zbiory - jeden domknięty a drugi otwarty to któryś z nich ma spójną składową o średnicy co najmniej $\sqrt{3}$. Wnioskiem jest fakt, iż każda funkcja ciągła z dysku w prostą ma wartość której przeciwobraz ma też składową spójności o średnicy $\sqrt{3}$. Ciekawe, że dla wyższych wymiarów zamiast $\sqrt{3}$ mamy 2 (a dla wymiaru jeden - 0).

Z kolei praca [NWS] to teoriomnogościowa praca gdzie dowodzi się równoważności hipotezy continuum (CH) z pewną własnością zbiorów mierzalnych co jest odpowiednikiem dla miary wyniku dla kategorii w pracy [NW] i odpowiedzią na pytanie tam postawione.

Literatura

- [CS] K. Ciesielski, M. Szyszkowski, *A symmetrically continuous function which is not countably continuous*, Real Analysis Exchange 22 (1996–1997), 428–432.
- [SS1] M. Szyszkowski, *Points of weak symmetric continuity*, Real Analysis Exchange 24 (1998–1999), 807–813.
- [SD1] M. Szyszkowski, *Symmetrically continuous functions on proper subsets of the real line*, Real Analysis Exchange 25 (2000), 547–565.
- [SD2] M. Szyszkowski, *Symmetric derivative on subsets of the real line*, Real Analysis Exchange 29 (2004), 799–805.
- [SS2] A. Nowik, M. Szyszkowski, *Points of weak symmetry*, Real Analysis Exchange 32 (2) (2007), pp. 563–568.
- [NWS] A. Nowik, T. Weiss, M. Szyszkowski, *On the ω_1 limits of subsets of the real line*, Acta Math. Hungarica 123 (4) (2009), pp. 311–317.
- [SS3] A. Nowik, M. Szyszkowski, *Every set is "symmetric" for some function*, Mathematica Slovaca 63 (4) (2013), pp. 897–901.
- [MS] A. Maliszewski, M. Szyszkowski, *Level sets on disk*, American Mathematical Monthly 121 (3) (2014), pp. 221–227.

Prace innych autorów

- [CL] K. Ciesielski, L. Larson *Uniformly antisymmetric function* Real Anal. Exchange 19 (1) (1993–94), 226–235.
- [CNM] K. Ciesielski, K. Muthuvel, A. Nowik *On nowhere weakly symmetric functions ...* Fund. Math. 168 (2001), 119–130.
- [NW] T. Natkaniec, J. Wesolowska *On the convergence of ω_1 sequences of real functions*, Acta Math. Hungar. 90 (2001), 333–350.

Marek Szyszkowski