

Streszczenie

Tematem niniejszej rozprawy są wybrane własności ideałów, σ -ideałów oraz zbiorów z nimi związanych. Szczególne miejsce zajmują w niej porowatość i σ -porowatość, które stanowią motyw przewijający się przez kolejne rozdziały, spajając znaczną część przedstawionych zagadnień. Ponadto w pracy badane są między innymi sumy proste ideałów podzbiorów liczb naturalnych, reprezentowalność za pomocą układów indeksowanych rodzin zbiorów skończonych oraz istnienie zbiorów uniwersalnych dla ideałów.

Porowatość jest metryczną własnością zbiorów, intuicyjnie opisującą stopień ich „podziurawienia”. Stanowi ona wzmocnienie własności nigdziegęstości. Termin σ -porowaty odnosi się do zbiorów będących przeliczalnymi sumami zbiorów porowatych. Na przestrzeni lat wprowadzono wiele wariantów definicji porowatości, które znacząco się od siebie różnią. Szerokie omówienie tej tematyki można znaleźć w pracach Zająčka ([48], [47]).

Praca składa się z sześciu rozdziałów. W pierwszym z nich zebrano podstawowe definicje, oznaczenia oraz wyniki z literatury wykorzystywane w dalszej części rozprawy. Definicje i oznaczenia specyficzne dla poszczególnych zagadnień wprowadzane są na początku odpowiednich rozdziałów – takie rozwiązanie pozwala zachować przejrzystość wyводу i ograniczyć liczbę pojęć zgromadzonych w części wprowadzającej.

Rozdział 2 opiera się na wynikach z pracy [31]. Jego głównym celem jest skonstruowanie właściwego ideału na przestrzeni Cantora, który zawiera ideał Hindmana $\mathcal{H}$, ideał zbiorów non-piecowie syndetic nPS oraz ideał asymptotycznej gęstości zero $\mathcal{I}_d$, tworzące dolną część Diagramu Kowitza [33, s. 20]. W ten sposób uzupełniamy wspomniany diagram, a otrzymany ideał nazywamy ideałem rzymskim, nawiązując do powiedzenia *wszystkie drogi prowadzą do Rzymu*. Istotnym elementem rozdziału jest analiza rodziny dopełnień i dopełnienia rodziny zbiorów grubych, tj. zawierających dowolnie długie przedziały liczb naturalnych. Badamy również własności operacji Perm, za pomocą której uzyskujemy nowe charakteryzacje ideału nPS oraz rozwiązujemy problem postawiony w [31, Problem 1].

W Rozdziale 3 wykorzystujemy wyniki z rozdziału poprzedniego. Bazuje on w całości na publikacji [30]. Dotyczy σ -porowatości ideałów na przestrzeni Cantora. Rozpoczynamy od omówienia klasycznych pojęć porowatości w przestrzeniach metrycznych, a następnie wprowadzamy ich odpowiedniki dla rodzin podzbiorów przestrzeni Cantora. W pierwszej kolejności wykazujemy, że żaden ideał sumowalny nie jest σ -porowaty. Przechodzimy następnie do charakteryzacji σ -porowatych ideałów za pomocą dopełnienia rodziny zbiorów

grubych. W szczególności otrzymujemy, że ideały zawarte w tym dopełnieniu, w tym ideał Hindmana $\mathcal{H}$ oraz ideał zbiorów non-pieciwise syndetic nPS, są σ -porowate.

Rozdział 4 nawiązuje do wyników z [38], które rozszerzamy o nowe konstrukcje i własności – wprowadzamy operację amalgamacji układu rodzin, omawiamy przykład związany z topologią Ellentucka oraz rozwiązujemy Problem 3.6 ze wspomnianej pracy. Kontynuujemy badania nad rodziną zbiorów non-pieciwise syndetic nPS, uogólniając to pojęcie na dowolne przestrzenie. Inspiracją do badań był klasyczny schemat Marczewskiego-Burstina oraz pojęcie MB-reprezentowalności wprowadzone w [34]. Na podstawie znanej charakteryzacji zbiorów należących do ideału nPS konstruujemy schemat, w którym reprezentację stanowi układ rodzin indeksowanych, a schemat Marczewskiego-Burstina jest jego szczególnym przypadkiem. Otrzymana konstrukcja prowadzi do pojęcia nPS-reprezentowalności ideałów. W szczególności wykazujemy, że każdy ideał typu F_σ jest nPS-reprezentowalny za pomocą układu rodzin zbiorów skończonych.

Rozdział 5 opiera się na wynikach z [39] oraz [32]. Poświęcony jest zbiorom uniwersalnym, które stanowią podstawowe narzędzie w opisowej teorii mnogości, wykorzystywane do badania klas opisowych oraz konstruowania analitycznych zbiorów nieborelowskich. W pierwszej podsekcji zestawiamy różne warianty definicji zbioru uniwersalnego, zarówno znane z literatury, jak i wprowadzone w rozprawie. Następnie badamy możliwość konstruowania domkniętych zbiorów uniwersalnych, wskazując zarówno warunki ich istnienia, jak i ograniczenia takich konstrukcji. Wykorzystując topologię Vietorisa, przedstawiamy ponadto alternatywny względem [15] schemat konstrukcji zbiorów uniwersalnych, który stosujemy do rodziny zbiorów porowatych oraz σ -ideału zbiorów σ -porowatych. W końcowej części rozdziału przechodzimy od zbiorów uniwersalnych dla pojedynczych rodzin do zbiorów uniwersalnych dla klas ideałów. Prowadzi to do wprowadzenia pojęcia zbioru semiuniwersalnego oraz pierwszych konstrukcji dla rodziny wszystkich ideałów sumowalnych i wszystkich ideałów typu F_σ , wyznaczając tym samym potencjalny kierunek badań.

Ostatni rozdział bazuje na nieopublikowanych na dzień składania rozprawy wynikach. Podejmuje temat zbiorów mikroskopijnych z wykorzystaniem języka teorii gier oraz przenoszenia punktów porowatości przez klasyczne odwzorowanie między przestrzenią Cantora a odcinkiem jednostkowym, zwane funkcją Cantora-Lebesgue’a. W pierwszej części konstruujemy cantorowski odpowiednik σ -ideału $\mathcal{M}_{(f_n)}^\otimes$, złożonego ze wszystkich zbiorów zawartych w pewnym zbiorze typu F_σ należącym do rodziny zbiorów (f_n) -mikroskopijnych $\mathcal{M}_{(f_n)}$. Otrzymana konstrukcja prowadzi do zdefiniowania odpowiedniej gry, która pozwala badać związki pomiędzy rodzinami zbiorów mikroskopijnych i porowatych. W drugiej części analizujemy przenoszenie punktów porowatości przez wspomniane odwzorowanie, nawiązując do wyników pracy [14], w której autorzy przenoszą zbiory mikroskopijne. Wykazujemy, że odwzorowanie to ustala izomorfizm pomiędzy rodzinami zbiorów dolnie porowatych na przestrzeni Cantora i odcinku jednostkowym. W przypadku górnej porowatości sytuacja okazuje się bardziej subtelna – otrzymujemy implikacje w obu kierunkach, przy czym jedna z nich wymaga dodatkowego założenia.