

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

JAKUBA SZMELTERA-TOMCZUKA

pt. "Connected components of the singular locus of the moduli space of compact Riemann surfaces."

przygotowanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Grzegorza Gromadzkiego.

Przestrzeń modułów $\mathcal{M}_g$ zwartych powierzchni Riemanna rodzaju $g \geq 2$ będąc przestrzenią orbit naturalnego działania grupy klas odwzorowań $\mathfrak{M}_g$ na przestrzeni Teichmüllera $\mathcal{T}_g$, ma strukturę zespolonego orbifoldu wymiaru $3(g - 1)$. Kanoniczne rzutowanie $\mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$ jest nakryciem rozgałęzionym, którego zbiór rozgałęziony (ang. branch set) $\mathcal{S}_g$, nazywany obszarem osobliwym, jest złożony z punktów odpowiadających klasom izomorfizmów zwartych powierzchni Riemanna mających nietrywialne automorfizmy. Przedmiotem rozprawy doktorskiej są topologiczne własności $\mathcal{S}_g$, w szczególności spójność oraz struktura i własności składowych spójności obszaru osobliwego.

Rozprawa podzielona jest, wyłączając wstęp oraz opis wyników, na pięć rozdziałów.

Pierwszy rozdział poświęcony został na przedstawienie wstępnych informacji potrzebnych do zrozumienia dowodów zawartych w pozostałych rozdziałach, oraz na zaprezentowanie metodologii, której używamy.

Przedmiotem drugiego rozdziału rozprawy są tzw. zwyczajne składowe spójności (ang. ordinary connected components) obszaru osobliwego, tj. składowe, które nie zawierają punktów $\mathcal{M}_g$, odpowiadających powierzchniom mającym automorfizm rzędu 2. Jednym z najważniejszych wyników przedstawionych w tym rozdziale jest twierdzenie orzekające, iż każda zwyczajna składowa spójności jest składową Cornalby. Wnioskiem z tego jest fakt, że każda taka składowa jest nierozkładalną podrozmaitością algebraiczną przestrzeni modułów. Udowodniliśmy, że każda warstwa równosymetryczna (ang. equisymmetric stratum), zawarta w takiej składowej $\mathcal{C}$ jest zadana przez działanie cyklicznej p -grupy. Ponadto, wykazaliśmy, że liczba pierwsza p jest wyznaczona jednoznacznie dla $\mathcal{C}$, tzn. jeżeli dwie warstwy zadane przez działania p -grupy oraz q -grupy są zawarte w $\mathcal{C}$, to $p = q$. Udowodniliśmy również, że zwyczajne składowe spójności mogą składać się z dowolnie dużej liczby warstw, dla odpowiednio dużych g . Dla liczby pierwszej $p \geq 5$ oraz liczby całkowitej $n \geq 2$, skonstruowaliśmy zwyczajną składową spójności zawierającą przynajmniej n warstw zadanych przez działania p -grup. Jako wniosek wykazaliśmy, że najmniejsze g , dla którego istnieje zwyczajna składowa spójności zawierająca przynajmniej dwie warstwy, jest równe 10.

W trzecim rozdziale przedstawiamy wyniki dotyczące struktury tzw. niezwyklej składowej spójności $\mathcal{C}_g^{2,3}$ (ang. exceptional connected component), zawierającej wszystkie punkty

$\mathcal{M}_g$ odpowiadające powierzchniom mającym automorfizm rzędu 2 lub 3. Wprowadzamy do badań tzw. graf Cornalby $\mathcal{G}_g$, którego wierzchołki są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości ze składowymi Cornalby zawartymi w $\mathcal{S}_g$. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią, gdy odpowiadające im składowe mają niepustą część wspólną. Wykazujemy, że ograniczenie górne na średnicę tego grafu jest niezależne od g i jest równe 5 dla każdego rodzaju. Definiujemy zredukowany graf Cornalby $\widehat{\mathcal{G}}_g$ i wykazujemy, że jest on spójnym podgrafem $\mathcal{G}_g$, którego średnica również jest mniejsza niż 6. Ponadto wykazujemy, że średnica tego grafu jest równa 5 dla nieskończenie wielu g . Dla dowolnego podgrafu $\mathcal{H}$ grafu Cornalby wprowadzamy pojęcie grubej powłoki (ang. bold hull) $\overline{\mathcal{H}}$ i udowadniamy, że $\mathcal{G}_g = \overline{\mathcal{G}_g(2)}$, gdzie $\mathcal{G}_g(2)$ jest podgrafem rozpiętym na wierzchołkach odpowiadających działaniom grupy Z_2 . Wykazujemy, że średnica $\overline{\mathcal{G}_g(2)}$ jest równa 3 dla nieskończenie wielu g . Jako wniosek znajdujemy warunki konieczne na to, aby odległość między dwoma wierzchołkami $\mathcal{G}_g$ była równa 5.

Rozdział czwarty poświęcony został badaniu własności tzw. skończenie maksymalnych (ang. finitely maximal) działań Z_p . Warstwy odpowiadające tym działaniom są składowymi spójności $\mathcal{S}_g$, co czyni te działania dla nas szczególnie interesującymi. W pierwszym podrozdziale znajdujemy warunki konieczne oraz wystarczające na to, aby sygnatura $(h; p, .^r., p)$ odpowiadała działaniu skończenie maksymalnemu. Jako rezultat sklasyfikowaliśmy te działania Z_p , których rozszerzalność jest w pełni zdeterminowana przez ich sygnaturę. W drugim podrozdziale wprowadzamy pojęcie kombinatorycznej gęstości podzbioru względem filtracji. Wykazujemy, że zbiór działań skończenie maksymalnych jest kombinatorycznie gęsty w zbiorze wszystkich działań grup Z_p o ustalonym wymiarze Teichmüllera, co oznacza, że w pewnym sensie działania skończenie maksymalne stanowią większość wszystkich działań Z_p .

W ostatnim rozdziale podejmujemy temat spójności obszaru osobliwego. W pracy [On the connectivity of branch loci of moduli spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **38**(1) (2013) 245–258.] G. Bartolini, A. F. Costa oraz M. Izquierdo wykazali, że $\mathcal{S}_g$ jest spójny wyłącznie dla $g = 3, 4, 7, 13, 17, 19, 59$. Usiłując znaleźć prostszy dowód istnienia składowej $\mathcal{C}_g^{2,3}$ przypadkiem znaleźliśmy błąd w dowodzie tego twierdzenia. Jak się okazuje błędu tego nie da się naprawić. Wykazujemy, że $\mathcal{S}_{149}$ jest również spójny. Obserwacja ta pozostawia możliwość, iż obszar osobliwy jest spójny dla nieskończenie wielu g . Używając klasycznych wyników z analitycznej teorii liczb wykazujemy, że tak nie jest. Stawiamy hipotezę, że $\mathcal{S}_g$ jest spójny wyłącznie dla $g = 3, 4, 7, 13, 17, 19, 59$ oraz 149.