UNIVERSITY OF ABERDEEN

Prof. Jarosław Kędra
Institute of Mathematics
University of Aberdeen
Aberdeen AB24 3UE
Scotland

3 września 2026

Recenzja rozprawy doktorskiej Jakuba Szmeltera-Tomczuka pt *Connected components of the singular locus of the moduli space of compact Riemann surfaces.*

Wprowadzenie. Niech Σ_g będzie zamkniętą orientowalną powierzchnią rodzaju $g \in \mathbb{N}$. Dopuszcza ona wiele struktur zespolonych. Dwie struktury zespolone nazywamy równoważnymi jeśli istnieje dyfeomorfizm powierzchni Σ_g izotopijny z identycznością, który przenosi jedną w drugą. Klasy równoważności struktur zespolonych ze względu na tę relację są parametryzowane tzw. przestrzenią Teichmüllera $\mathcal{T}_g$. Skoro relacja jest określona tylko przy pomocy dyfeomorfizmów izotopijnych z identycznością, na przestrzeni $\mathcal{T}_g$ działa grupa $\mathrm{Mod}(g)$ klas odwzorowań. To działanie jest właściwie nieciągłe i iloraz $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}/\mathrm{Mod}(g)$ nazywamy przestrzenią modułów powierzchni Riemanna rodzaju g. Naturalne odwzorowanie $\mathcal{T}_g \to \mathcal{M}_g$ jest nakryciem rozgałęzionym wzdłuż zbioru $\mathcal{B}_g \subseteq \mathbb{M}_g$, którego topologia jest interesująca i tajemnicza.

Ponadto przestrzeń modułów $\mathcal{M}_g$ ma tzw uzwarcenie Deligne-Mumforda $\overline{\mathcal{M}}_g$, które jest zespoloną rozmaitością rzutową. Ten opis mówi, że $\mathcal{M}_g$ jest quasi-rzutową rozmaitością i jej zbiór jej punktów osobliwych $\mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{M}_g$ jest interesujący. Okazuje się, że zbiór tychże punktów osobliwych jest podzbiorem zbioru punktów rozgałęzienia a jeśli $g \geq 4$ to te zbiory są równe.

Przedmiotem rozprawy jest topologia punktów osobliwych $\mathcal{S}_g$ przestrzeni modułów $\mathcal{M}_g$, a dokładniej zrozumienia składowych spójności $\mathcal{S}_g$. Każdy punkt osobliwy, będąc także punktem rozgałęzienia jest reprezentowany przez powierzchnię Riemanna mająca nietrywialne automorfizmy. Głębokie rozumienie tychże grup automorfizmów jest jednym z głównych narzędzi rozprawy.

Przestrzeń modułów $\mathcal{M}_g$ ma dwie naturalne topologie: tzw topologie Teichmüllera pochodzącą od gładkiej struktury na powierzchi Σ_g (struktura zespolona to gładkie cięcie odpowiedniej wiązki nad Σ_g) oraz topologie Zariskiego dziedziczoną z $\overline{M}_g$. Jedną z pierwszych obserwacji dysertacji jest fakt, że jeśli $g \geq 5$ to składowe spójności $\mathcal{S}_g$ są takie same względem obu topologii (Twierdzenie 1.25).

Omówienie rozprawy. Omówię teraz główne wyniki pracy bez zbytniego wdawania się w

techniczne szczegóły i czasami upraszczając sformułowania wyników.

Niech G będzie skończoną grupą i niech $\mathcal{M}_g^G \subseteq \mathcal{M}_g$ będzie podzbiorem reprezentowanym przez powierzchnie, których grupa automorfizmów jest równoważna G (szczegóły równoważności są w Rozdziałach 1.1 i 1.2). Zbiór $\mathcal{M}_g^G$ nazywany jest *warstwą*.

Autor bazuje na następujących wynikach. Po pierwsze, zbiór osobliwy $\mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{M}_g$ jest sumą nieprzywiedlnych podrozmaitości (Cornalba [13]), które Autor nazywa *składowymi Cornalby*. Po drugie, domknięcie Zariskiego $\overline{\mathcal{M}}_g^G$ niepustej warstwy jest nieprzywiedlną podrozmaitością (Broughton [11]). Ponadto każda składowa Cornalby jest postaci $\overline{\mathcal{M}}_g^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$. Następnie, motywowany innymi znanymi wynikami, Autor wyróżnia następujące dwa typy składowych spójności:

- *wyjątkowy*: złożony z powierzchni, które dopuszczają automorfizmy rzędu 2 i 3;
- *zwykły*: złożony albo z pojedynczej warstwy albo z domknięcia pojedynczej warstwy.

Rozdział 2. W Rozdziale 2 Autor bada zależności między warstwami i składowymi spójności i dowodzi, między innymi, następujące twierdzenia:

- (Twierdzenie 2.5) Niech G będzie grupą rzędu p^n, gdzie p jest liczbą pierwszą i $n \geq 2$. Jeśli warstwa $\mathcal{M}_g^G$ nie zawiera się w składowej wyjątkowej to G jest cykliczna.
- (Twierdzenie 2.6) Składowa zwykła jest postaci $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{M}}_g^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$. Ponadto, jeśli $\mathcal{M}_g^G \subseteq \mathcal{C}$ to G jest cykliczną p-grupą.
- (Wniosek 2.7) Każda zwykła składowa jest składową Cornalby.
- Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą $n \geq 2$. Jeśli $g = p^{n-1}(p-1)/2$ to zbiór osobliwy $\mathcal{S}_g$ zawiera zwykłą składową, która jest sumą co najmniej n warstw pochodzących od działań p-grup. Ponadto minimalny rodzaj, dla którego takie zjawisko zachodzi to $g = 10$.

Rozdział 3. W Rozdziale 3 Autor bada tzw *graf Cornalby*. Jego wierzchołkami są składowe Cornalby; dwa wierzchołki są połączone krawędzią jeśli odpowiadające im składowe mają niepusty przekrój. Główny wynik (Wniosek 3.6) mówi, że średnica grafu Cornalby jest co najwyżej 5, jeśli $g \geq 2$. Ponadto dla nieskończenie wielu g, średnica jest co najmniej 4 (Twierdzenie 3.8).

Rozdział 4. W Rozdziale 4 Autor bada maksymalne skończone podgrupy postaci $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Mod}(g)$. Głównym wynikiem jest Twierdzenie 4.3, które podaje klasyfikację maksymalnych grup $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sygnatury $(h; p, \ldots, p)$ (definicja sygnatury jest w Rozdziale 1.1). Ponadto Autor dowodzi, że w określonym przez niego sensie maksymalnych działań $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest wśród wszystkich działań tej grupy bardzo dużo (Twierdzenie 4.13).

Rozdział 5. W Rozdziale 5 Autor bada spójność zbiorów $\mathcal{S}_g$ punktów osobliwych. Głównym wynikiem pracy [6] jest twierdzenie, że $\mathcal{S}_g$ jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy $g \in$

$\{3, 4, 7, 13, 17, 19, 59\}$ Autor zaczyna od obserwacji mówiącej, że wyniki pracy [6] są fałszywe i dowodzi, że $\mathcal{S}_{149}$ jest spójny (Twierdzenie 5.9). Ponadto dowodzi, że spójność $\mathcal{S}_g$ zachodzi tylko dla skończenie wielu g.

Ocena wyników. Rozprawa zawiera wiele ciekawych i głębokich twierdzeń, których większość ma nietrywialne dowody. Wyniki istotnie poszerzają naszą wiedzę o punktach osobliwych przestrzeni modułów. Trudno mi wybrać twierdzenie, które lubię najbardziej; w każdym wyniku jest coś co mi się podoba. Najbardziej cenię metody ich dowodzenia używające technik z teorii grup. Podoba mi się swoboda z jaką Autor przekracza granice między geometrią algebraiczną a topologią i, jeśli to użyteczne, to jak używa teorii liczb. Mam nadzieję, że w przyszłości Autor rozszerzy swoje zainteresowania poza badanie przestrzeni modułów.

Pytania.

1. Jak się mają wyniki Rozdziału 2 do topologicznej spójności $\mathcal{S}_g$? Konkretnie czy $\overline{\mathcal{M}}_g^G$ to jest cała (topologiczna) składowa spójności? A jeśli nie to kiedy jest?
2. Czy są inne składowe spójności poza wyjątkowymi i zwykłymi?
3. Nie jestem przekonany czy Twierdzenie 4.2 jest prawdziwe. Chodzi o to, że w pracy [32] autorzy je niejasno formułują a z ich dowodu nie wynika, że istnieje maksymalne działanie. Moim zdaniem to czego oni dowodzą to fakt, że *jeśli* istnieje działanie $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ o danej sygnaturze, to, przy danych założeniach jest ono maksymalne. Czy można wyjaśnić moją wątpliwość?
4. Główne wyniki Rozdziału 4 są o maksymalnych działaniach sygnatury $(h; p, \ldots, p)$. Czy istnieją (maksymalne) działania $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ innych sygnatur?

Uwagi krytyczne. Praca jest napisana nieprzystępnie. Głównym problemem dla czytelnika są definicje, na szukanie których traci się ogromnie dużo czasu. Np definicja składowej Cornalby, która jest kluczowym pojęciem rozprawy, pojawia się jakby mimochodem w tekście we wstępie. Również fakt, że składowa Cornalby jest równa $\overline{\mathcal{M}}_g^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ jest wspomniany bez komentarza i referencji. Moim zdaniem w tego typu rozprawie powinna pojawić się definicja powierzchni Riemanna. Autor również nie komentuje swojej niestandardowej definicji grupy Fuchsa.

Mam wrażenie, że sformułowania niektórych twierdzeń nie zawierają istotnych założeń. Dotyczy to głównie Rozdziału 2 gdzie, po prostu założyłem, że $g \geq 5$ w całym rozdziale. Obawiam się, że Twierdzenie 4.2 zostało zacytowane nieostrożnie (patrz pytanie 3 powyżej).

Popracowanie nad przystępniejszym i bardziej rygorystycznym stylem może zaowocować publikacjami w lepszych czasopismach. Gdyby praca była porządniej napisana zgłosiłbym wniosek o wyróżnienie.

Podsumowanie. Stwierdzam, że rozprawa doktorska Jakuba Szmeltera-Tomczuka zawiera oryginalne wyniki naukowe, świadczy o bardzo dobrej znajomości przez Autora dyskutowanej tematyki i dziedzin pokrewnych. Rozprawa spełnia z nawiązką wymagania stawiane

rozprawom doktorskim określone w obowiązujących przepisach.

W związku z powyższym wnoszę o dopuszczenie Jakuba Szmetera-Tomczuka do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Z poważaniem,