

Asoc. prof. Dorota Kuziak
Department Statistics and Operations Research
University of Cadiz, Campus of Algeciras, Spain

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Tytuł rozprawy: *Certified Domination in Graphs
Structural Properties and Applications*

Autor: mgr Mateusz Miotk

1. Tematyka

Rozprawa wpisuje się w nurt współczesnej teorii grafów oraz algorytmicznej teorii dominowania. Praca poświęcona jest pojęciu zbiorów dominujących z certyfikatami (*certified dominating sets*), wprowadzonym pierwotnie przez J. Toppa i in. Zbiór dominujący $D \subseteq V(G)$ nazywamy dominującym z certyfikatami, jeśli każdy wierzchołek $v \in D$ posiada zero lub co najmniej dwóch sąsiadów poza zbiorem D . Celem pracy jest wszechstronne zbadanie liczby dominowania z certyfikatami $\gamma_{\text{cer}}(G)$ (tzn. liczby wierzchołków w najmniejszym zbiorze dominującym z certyfikatami w grafie G):

- pod względem jej podstawowych własności;
- w odniesieniu do jej relacji z klasyczną liczbą dominowania $\gamma(G)$;
- pod kątem strukturalnych charakterystyk klas grafów w szczególności grafów $\mathcal{DD}_2$ (grafy, w których zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne zbiory: jeden dominujący, a drugi 2-dominujący) oraz grafów krytycznych ze względu na zbiór dominujący z certyfikatami;
- z punktu widzenia złożoności obliczeniowej, konstrukcji algorytmów dokładnych (ILP, algorytmów liniowych dla drzew) i heurystycznych oraz ich zastosowań aplikacyjnych (np. przeciwpożarowe sieci wodociągowe, sieci społecznościowe).

Rozprawa opiera się na sześciu spójnych tematycznie artykułach naukowych (Praca A – Praca F) opublikowanych w renomowanych międzynarodowych czasopismach (*Scientific Reports, IEEE Access, Discrete Optimization, Opuscula Mathematica, Utilitas Mathematica, Discrete Mathematics Letters*) i posiada tradycyjną, przejrzystą strukturę cyklu publikacji opatrzonego odautor-skim komentarzem.

2. Wyniki

A. Wkład teoretyczny i charakterystyki strukturalne

Przedstawione w rozprawie wyniki wnoszą istotny wkład w rozwój klasycznej teorii dominowania w grafach. Do najważniejszych osiągnięć o charakterze fundamentalnym i strukturalnym należy zaliczyć:

- **Równość** $\gamma(G) = \gamma_{\text{cer}}(G)$ (Praca A): Wykazano, że dla spójnego grafu o co najmniej trzech wierzchołkach powyższa równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje najmniejszy zbiór dominujący D , którego dopełnienie $V(G) \setminus D$ tworzy zbiór 2-dominujący (Twierdzenie 2.1). Udowodniono także, że równość ta zachodzi m.in. dla grafów bez indukowanej ścieżki P_4 .
- **Grafy γ_{cer} -krytyczne** (Praca B): Wdrożono i sformalizowano pojęcie krytyczności wierzchołkowej ze względu na dominowanie z certyfikatami. Wykazano, że w przypadku drzew klasa grafów γ_{cer} -krytycznych pokrywa się dokładnie z korona-grafami otrzymanymi z drzew. Podano również pełną klasyfikację 2-wierzchołkowo γ_{cer} -krytycznych grafów (Twierdzenie 2.14).
- **Charakteryzacja grafów $\mathcal{DD}_2$ i grafów dwudzielnych** (Praca D, C): Dokonano charakteryzacji grafów $\mathcal{DD}_2$ w oparciu o słabe wierzchołki wspierające (Twierdzenie 2.15). Podano pełny opis minimalnych grafów $\mathcal{DD}_2$ (Twierdzenie 2.16), a także minimalnych grafów $\mathcal{DD}_2$ spełniających $\gamma(G) = \gamma_{\text{cer}}(G)$ (Twierdzenie 2.20). Przedstawione są również warunki, przy których mniejszy zbiór partycji grafu dwudzielnego stanowi najmniejszy zbiór dominujący z certyfikatami (Twierdzenie 2.21 i 2.23).

B. Wkład algorytmiczny i analiza złożoności

Doktorant z powodzeniem połączył badania czysto teoretyczne z analizą algorytmiczną, co podnosi wartość pracy. Na szczególną uwagę w tym obszarze zasługują następujące wyniki:

- **Złożoność problemu** (Praca F): Udowodniono, że rozstrzygnięcie czy $\gamma(G) \neq \gamma_{\text{cer}}(G)$ jest problemem NP-trudnym, nawet w przypadku klasy grafów posiadających tylko jeden słaby wierzchołek wspierający (Twierdzenie 2.29).
- **Algorytm dokładny dla drzew** (Praca E): Opracowano i zweryfikowano algorytm liniowy wyznaczający najmniejszy zbiór dominujący z certyfikatami w drzewach (MCDS).
- **Sformułowanie ILP** (Praca E): Skorygowano i zweryfikowano błędny model programowania liniowego całkowitoliczbowego z wcześniejszej literatury (Jakkepalli et al.), podając ścisły dowód poprawności ograniczeń (Stwierdzenie 2.27 i 2.28).
- **Algorytmy heurystyczne** (Praca F): Zaproponowano dwa algorytmy: ClassicToCert (przekształcenie zbioru dominującego) oraz ApproxCert (konstrukcja bezpośrednia). Wyniki eksperymentalne dowiodły wyższości podejścia konstruktywnego nad modyfikującym istniejący zbiór dominujący.

3. Zalety rozprawy

- **Kompleksowość:** Udana połączenie teorii matematycznej (charakteryzacje, dowody, struktury) z praktyczną i komputerową stroną problemu (ILP, heurystyki, NP-trudność).
- **Korekta błędów w literaturze:** Wskazanie i naprawienie luki/błędu w modelu ILP oraz procedurze transformacji we wcześniejszych pracach innych autorów (podrozdziały 2.5.1.2 i 2.5.2).
- **Aplikacyjność:** Przedstawienie praktycznych modeli wykorzystujących zbiory dominujące z certyfikatami w przeciwpożarowych sieciach wodociągowych oraz analizie sieci społecznościowych (Praca E, F).
- **Dorobek naukowy:** Wszystkie publikacje stanowiące podstawę rozprawy zostały opublikowane w uznanych międzynarodowych czasopismach, a dwie z nich są publikacjami jednoautorskimi. Ponadto Autor posiada znaczący dorobek naukowy niezwiązany bezpośrednio

z rozprawą, co świadczy o jego szerokich zainteresowaniach badawczych oraz elastyczności naukowej w podejmowaniu zróżnicowanej problematyki (Praca G – Praca K).

4. Uwagi

- **Analiza teoretyczna heurystyki:** W pracy przedstawiono algorytm ApproxCert. Dobrze byłoby rozwinąć teoretyczną analizę jego współczynnika aproksymacji (zostało to jednak słusznie wskazane przez Autora jako kierunek przyszłych badań).
- **Ujednolicenie oznaczeń:** W opisie algorytmów w Appendices występują różnorodne oznaczenia zmiennych stanów; płynniejsza integracja z czysto matematycznymi rozdziałami poprawiłaby spójność edytorską.
- **Współpraca naukowa:** Dotychczasowa współpraca naukowa Doktoranta opiera się na bliskich relacjach z uznanymi ośrodkami akademickimi, głównie polskimi. W kontekście dalszego rozwoju naukowego oraz internacjonalizacji prowadzonych badań, wysoce rekomendowane jest poszerzenie dotychczasowych kontaktów o współpracę z renomowanymi zagranicznymi ośrodkami naukowymi.

5. Podsumowanie

Charakterystyczną i bardzo mocną stroną dorobku naukowego prezentowanego w rozprawie jest znaczący wkład własny Autora. Działalność badawcza mgra Mateusza Miotka odzwierciedla dojrzałość naukową: z jednej strony potrafi efektywnie i twórczo współdziałać w zespołach badawczych (nad projektami teoretycznymi i aplikacyjnymi), z drugiej zaś – posiada w pełni niezależny potencjał badawczy udokumentowany publikacjami jednoautorskimi.

Przedstawiona rozprawa doktorska mgra Mateusza Miotka stanowi wartościowy, oryginalny i dojrzały wkład w rozwój matematyki oraz informatyki teoretycznej w zakresie teorii grafów. W mojej ocenie, rozprawa spełnia wszelkie wymogi stawiane pracom doktorskim. Na podstawie dołączonego dorobku naukowego, stopnia trudności rozwiązanych problemów oraz poziomu edytorskiego i merytorycznego rozprawy, wnioskuję o dopuszczenie mgra Mateusza Miotka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

KUZIAK
DOROTA -
Y1491334M

Firmado digitalmente
por KUZIAK DOROTA
- Y1491334M
Fecha: 2026.10.07
21:49:02 +02'00'