

Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Warszawa, 15.09.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej Mateusza Miotka

Certified domination in graphs; structural properties and applications

Praca doktorska Mateusza Miotka dotyczy pewnego zagadnienia w teorii dominowania w grafach. *Dominowanie* to rozległa dziedzina teorii grafów mająca liczne powiązania i zastosowania w matematyce i informatyce (np. w teorii kodów), ale także w rozmaitych zagadnieniach praktycznych. Historycznie wywodzi się, jak wiele zagadnień teorii grafów, ze sfery popularnych łamigłówek, w tym wypadku dotyczących rozmieszczenia figur na szachownicy.

Zbiór wierzchołków grafu G nazywamy *dominującym* jeżeli każdy wierzchołek spoza zbioru D ma przynajmniej jednego sąsiada w zbiorze D . Minimalny rozmiar takiego zbioru oznaczamy przez $\gamma(G)$ i nazywamy *liczbą dominującą* grafu G .

W interpretacji szachowej, wierzchołkami grafu są pola szachownicy, a krawędź grafu łączy dwa pola jeśli możliwy jest ruch danej figury (np. królowki) z jednego pola na drugie. Liczba dominująca oznacza wówczas minimalną liczbę królowek, które odpowiednio rozstawione na szachownicy atakują każde puste pole. W innej interpretacji możemy wyobrazić sobie, że w wierzchołkach zbioru dominującego umieszczono strażników, którzy obserwują wszystkie pozostałe wierzchołki grafu, przy czym każdy strażnik widzi tylko te wierzchołki, które sąsiadują z wierzchołkiem zajęтым przez niego. Liczba dominująca to wówczas minimalna liczba strażników potrzebnych do obserwowania całego grafu,

W zależności od potrzeb czy źródeł motywacji, rozważa się całe spektrum typów dominowania, w których narzuca się rozmaite dodatkowe warunki na zbiór dominujący (np. niezależność, spójność, etc.). Autor rozprawy skupia się na odmianie zwanej dominowaniem *certyfikowanym*, w której zakłada się dodatkowo, że każdy wierzchołek zbioru dominującego D sąsiaduje z co najmniej dwoma wierzchołkami spoza D lub z żadnym wierzchołkiem spoza D . Najmniejszą moc takiego zbioru oznacza się przez $\gamma_{\text{cer}}(G)$. W interpretacji szachowej, żadna z rozstawionych królowek nie atakuje dokładnie jednego pustego pola — jeżeli jakieś w ogóle atakuje, to istnieje inne, które również znajduje się w zasięgu jej ataku.

Motywacją badania tego wariantu dominowania, oprócz rozmaitych zastosowań praktycznych, jest ścisły związek z grafami DD_2 wprowadzonymi przez Henninga i Ralla. Są to grafy, których zbiór wierzchołków da się podzielić na zbiór dominujący i zbiór *2-dominujący* (każdy wierzchołek spoza tego zbioru jest obserwowany przez co najmniej dwóch strażników).

Rozprawa ma formę cyklu sześciu artykułów ([A-F]), poprzedzonego obszernym omówieniem oraz dodatkami z pseudokodami algorytmów. Omówię pokrótce niektóre z wyników rozprawy nie wchodząc zbyt głęboko w szczegóły techniczne.

Kiedy zachodzi równość $\gamma = \gamma_{\text{cer}}$? [A, C]. Prace [A] i częściowo [C] badają kwestię dla jakich grafów zachodzi równość $\gamma(G) = \gamma_{\text{cer}}(G)$. Wykazano między innymi, że dla grafu spójnego zachodzi ona wtedy i tylko wtedy, gdy dopełnienie pewnego γ -zbioru (zbioru dominującego mocy dokładnie $\gamma(G)$) jest zbiorem 2-dominującym. W konsekwencji równość zachodzi dla grafów o minimalnym stopniu $\delta(G) \geq 2$ i dla grafów z dokładnie jednym γ -zbiorem. Najładniejszy wynik tej części rozprawy mówi, że grafy spójne P_4 -wolne (za wyjątkiem K_2) spełniają równość $\gamma(G) = \gamma_{\text{cer}}(G)$. Ponadto zbadano też górną liczbę dominującą $\Gamma_{\text{cer}}(G)$, zdefiniowaną jako maksymalny rozmiar minimalnego (w sensie inkluzji) zbioru dominującego grafu. Wykazano, że równość $\Gamma_{\text{cer}}(G) = n$, gdzie n jest liczbą wierzchołków grafu G , zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy każda nietrywialna składowa grafu G jest *koroną*. Scharakteryzowano także grafy G spełniające równanie $\Gamma_{\text{cer}}(G) = n - 2$ i pokazano, że $\Gamma_{\text{cer}}(G) \leq \Gamma(G)$, o ile $\delta(G) \geq 2$.

Grafy DD_2 [D, C]. Motywem wiodącym prac [C] i [D] są wspomniane wyżej grafy DD_2 . W pracy [D] znajdujemy wynik mówiący, że dla grafu bez wierzchołków izolowanych następujące warunki są równoważne: (i) G jest grafem DD_2 ; (ii) G ma certyfikowany zbiór dominujący bez wierzchołków *zacienionych*; (iii) każdy *słaby* wierzchołek podpierający ma sąsiada, który nie jest ani liściem, ani wierzchołkiem podpierającym.

Twierdzenie to elegancko domyka charakteryzację rozpoczętą przez Henninga i Ralla i daje liniowy test rozpoznawania grafów DD_2 . Jest to chyba najmocniejszy rezultat całej rozprawy.

Ponadto, w pracy [D] opisano również spójne, krawędziowo minimalne grafy DD_2 : są to $K_{1,n}$ dla $n \geq 2$, cykl C_4 oraz *podziały* $S(H)$ spójnych multigrafów-koron H . Wykazano NP-trudność wyznaczania rozpinającego minimalnego podgrafu DD_2 o najmniejszym i o największym rozmiarze. Problem dodania najmniejszej liczby krawędzi, po którym graf staje się grafem DD_2 , okazał się NP-zupełny, a wersja z podziałami krawędzi sprowadza się do skojarzeń. W pracy [C] wyznaczono minimalne grafy DD_2 spełniające $\gamma(G) = \gamma_{\text{cer}}(G)$. Scharakteryzowano tam także grafy dwudzielne $G(A, B)$ z $|A| \leq |B|$, w których A jest jednocześnie γ -zbiorem i γ_{cer} -zbiorem.

Grafy γ_{cer} -krytyczne [B]. Wierzchołek v jest *krytyczny*, gdy $\gamma_{\text{cer}}(G - v) < \gamma_{\text{cer}}(G)$. Kandydat podaje lokalne kryteria krytyczności w języku prywatnych sąsiedztw względem γ_{cer} -zbiorów. Charakteryzuje grafy, w których każdy wierzchołek jest krytyczny: wśród grafów spójnych z liściem są to dokładnie korony, a przy $\delta \geq 2$ pojęcie pokrywa się z klasyczną γ -krytycznością. Podaje też pełny opis grafów 2-krytycznych: są to K_2 , $\overline{K_2}$ oraz K_{2n} bez skojarzenia doskonałego. Artykuł zawiera ponadto konstruktywną charakteryzację drzew, w których mniejsza klasa dwudzielności jest γ_{cer} -zbiorem.

Algorytmy i złożoność [E, F]. W pracy [E] podano jawny, trójfazowy algorytm liniowy wyznaczający γ_{cer} -zbiór drzewa. Zaproponowano tam też poprawne sformułowanie ILP, bo wcześniejsze sformułowanie Jakkepallego i in. zawodzi już dla P_4 . Zastosowaniem jest rozmieszczanie pomp i studni w sieci przeciwpożarowej. W [F] wykazano redukcję z 3-SAT, że

rozstrzygnięcie, czy $\gamma(G) \neq \gamma_{\text{cer}}(G)$, jest NP-trudne już dla grafów z jednym słabym wierzchołkiem podpierającym. Autorzy pokazali, że algorytm przekształcania zbioru dominującego w certyfikowany, znany z literatury, może się zapętlić. Zaproponowali poprawiony algorytm CLASSICTOCERT i zachłanną heurystykę APPROXCERT. Oba algorytmy testowano na losowych drzewach, a APPROXCERT także na próbkach sieci Google+ i Pokec. Na drzewach APPROXCERT niemal zawsze daje optimum, a CLASSICTOCERT wyniki gorsze o 12–20%.

Rozprawa jest zredagowana poprawnie, choć część opisowa mogłaby mieć nieco więcej cech artykułu przeglądowego.

Podsumowując stwierdzam, że rozprawa Mateusza Miotka to solidny doktorat zawierający szereg oryginalnych rezultatów dotyczących dominowania w grafach, opublikowanych w recenzowanych czasopismach, m. in. w *Discrete Optimization*, *Scientific Reports*, czy *IEEE Access*. Ich uzyskanie świadczy o rzetelnym opanowaniu warsztatu badawczego. Kandydat dobrze zna techniki dowodowe i umiejętnie łączy podejście strukturalne z algorytmicznym. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Mateusza Miotka do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Jarosław Grytczuk