

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
doktora Rafała Lutowskiego

*Zastosowanie teorii reprezentacji i metod obliczeniowych w badaniu
płaskich rozmaitości i struktur pokrewnych*

Uwagi ogólne

Dr Rafał Lutowski ukończył studia magisterskie w 2005 roku na Akademii Bydgoskiej im. Kazimierza Wielkiego. Następnie w 2010 roku, na Uniwersytecie Gdańskim, uzyskał stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki na podstawie rozprawy *Symetrie płaskich rozmaitości*. Promotorem pracy doktorskiej był prof. dr hab. Andrzej Szczepański - wybitny specjalista w zakresie geometrii, topologii oraz teorii grup i ich reprezentacji. Doktor Rafał Lutowski współpracuje z prof. Szczepańskim czego owocem są ich wspólne prace. Dorobek naukowy dr Lutowskiego według Zentralblatt obejmuje 23 prace naukowe (wliczając w to preprinty umieszczone na platformie arxiv) Świadczy to o dużej aktywności naukowej kandydata.

Dr Rafał Lutowski jako rozprawę habilitacyjną: *Zastosowanie teorii reprezentacji i metod obliczeniowych w badaniu płaskich rozmaitości i struktur pokrewnych* przedstawił 9 powiązanych tematycznie prac naukowych. Prace te opublikowane są w bardzo dobrych czasopismach akademickich o zasięgu międzynarodowym takich jak: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, *Experimental Mathematics*, *Journal of Algebra*, *Fundamenta Mathematicae* czy *Communications in Algebra*.

Uwagi szczegółowe

Niech $n \in \mathbb{N}$. Grupa krystalograficzna wymiaru n to dyskretna i kozwarta podgrupa grupy $\text{Iso}(\mathbb{R}^n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ izometrii n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jeżeli Γ jest grupą krystalograficzną wymiaru n to istnieje krótki ciąg dokładny

$$0 \rightarrow L \rightarrow \Gamma \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (1)$$

gdzie L to wolna grupa abelowa rangi n , maksymalna normalna podgrupa abelowa grupy Γ , a G - grupa skończona, grupa holonomii grupy Γ . Jeżeli grupa krystalograficzna Γ jest beztorsyjna to nazywamy ją grupą Bieberbacha. Przestrzeń orbit $X = \mathbb{R}^n/\Gamma$ jest zwartą rozmaitością riemannowską z zerową krzywizną sekcijną (płaską rozmaitością). Na odwrót każda zwarta płaska rozmaitość, z dokładnością do izometrii, jest taką przestrzenią orbit. Powyższy ciąg dokładny definiuje klasę kohomologii: $\alpha \in H^1(G, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L/L) \cong H^2(G, L)$.

W pracy [H1] kandydat podaje przykład płaskiej rozmaitości z nietrywialną grupą symetrii nieparzystego rzędu. W swojej konstrukcji dr Lutowski wykorzystuje podany przez Waldmüllera przykład grupy Bieberbacha z jednoelementową grupą automorfizmów zewnętrznych. Autor udowodnił istnienie grupy Bieberbacha z trywialnym centrum i grupą automorfizmów zewnętrznych rzędu 3. Znalazienie G -kraty M_2 oraz wyznaczenie grupy $C_{\text{Aut}(M_2)}(G)$ elementów odwracalnych pierścienia $\text{End}_{\mathbb{Z}G}(M_2)$ miało charakter eksperymentalny.

W [H2] zaprezentowano algorytmiczne podejście do wyznaczenia grup automorfizmów zewnętrznych grup krystalograficznych przy założeniu, że są one skończone. Niech Γ będzie grupą krystalograficzną. W obliczeniach w teorii grup krystalograficznych wybiera się bazę kraty L tj. ustala się izomorfizm $L \cong \mathbb{Z}^n$. Ponieważ reprezentacja holonomii $\phi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ jest wierna, $G \cong \phi(G)$. Niech N_α będzie stabilizatorem klasy kohomologii α względem działania: $*$: $N_{GL(L)}(\phi(G)) \times H^1(G, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L/L)$. W celu wyznaczenia $\text{Out}(G)$ konieczne jest wyznaczenie N_α oraz $H^1(G, \mathbb{Z}^n)$. Prowadzi to do układu równań: $AX = B$ gdzie $A \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$, $X, B \in M_{n \times m}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Układ ten rozwiązuje się przez sprowadzenie macierzy A do postaci diagonalnej. Ponieważ pierścień $\mathbb{Z}$ jest Euklidesowy macierz A można za pomocą operacji elementarnych doprowadzić do postaci normalnej Smitha. Stosując dodatkowo długi ciąg kohomologii można znaleźć prezentację grupy $\text{Out}(G)$ jako rozszerzenie $H^1(G, \mathbb{Z}^n)$ przez N_α/G .

W pracy [H6] kandydat wraz z A. Szczepańskim rozważa zupełne grupy krystalograficzne. Są to grupy których centrum i grupa automorfizmów zewnętrznych są trywialne. Głównym rezultatem tej pracy jest następujące interesujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ istnieje n -wymiarowa zupełna grupa krystalograficzna.*

Problemy istnienia grup zupełnych były rozważane przez Waldmüllera, który skonstruował zupełną grupę Bieberbacha oraz przez M. Belolipetsky'ego i A. Lubotzky'ego, którzy udowodnili istnienie dla każdego $n \geq 3$ zwartej hiperbolicznej n -rozmaitości z zupełną grupą podstawową.

W pracy [H3] badane są związki reprezentacji holonomii z własnością R_∞ grupy Bieberbacha. Mówimy, że rozmaitość X ma własność R_∞ , jeżeli liczba Reidemeistera $R(f) = \infty$ dla każdego homeomorfizmu $f : X \rightarrow X$. K. Dekimpe, B. De Rock i P. Penninckx postawili następującą hipotezę:

Hipoteza Niech $\phi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ będzie wierną $\mathbb{R}$ -nieprzywiedlną reprezentacją skończonej grupy $G \neq 1$. Przypuśćmy, że n jest liczbą nieparzystą. Wtedy dla każdego elementu $D \in N_{GL_n(\mathbb{Z})}(\phi(G))$ istnieje $a \in G$ takie, że $\phi(a)D$ ma wartość własną 1.

W [H3] otrzymany został następujący wynik w kierunku tej hipotezy:

Twierdzenie. *Powyższa hipoteza jest prawdziwa, jeżeli G posiada nietrywialną normalną podgrupę abelową.*

Autor dostaje również warunek wystarczający na to, aby płaskie rozmaitości z rozwiązalną grupą holonomii miały własność R_∞ :

Twierdzenie. *Niech Γ będzie grupą Bieberbacha z reprezentacją holonomii $\phi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$, gdzie G jest grupą rozwiązalną. Przypuśćmy, że d jest liczbą nieparzystą i $\phi' : G \rightarrow GL_d(\mathbb{Z})$ jest $\mathbb{R}$ -nieprzywiedlną podreprezentacją ϕ krotności 1. Załóżmy ponadto, że jeżeli podreprezentacja $\tilde{\phi} : G \rightarrow GL_d(\mathbb{Z})$ reprezentacji ϕ nie jest równoważna ϕ' , to grupy $\phi'(G)$ i $\tilde{\phi}(G)$ nie są sprzężone w $GL_d(\mathbb{Q})$. Wtedy Γ ma własność R_∞ .*

W pracy [H4] autorzy zajmują się spin strukturami na płaskiej orientowalnej rozmaitości X . Głównym technicznym problemem jest przemienność diagramu:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\epsilon} & \text{Spin}(n) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \lambda \\ G & \xrightarrow{\rho} & \text{SO}(n), \end{array} \quad (2)$$

gdzie $\rho : G \rightarrow \text{SO}(n)$ jest reprezentacją równoważną identyczności $\text{id} : G \rightarrow G \subset \text{SO}(n)$. W wyższych wymiarach znalezienie takiego ρ jest trudne. W przypadku gdy G jest 2-grupą kandydat z wniosku, że każda nieprzywiedlna reprezentacja wymierna 2-grupy jest indukowana z wymiernej reprezentacji stopnia 1 otrzymuje możliwość zastąpienia w powyższym diagramie grupy $\text{SO}(n)$ przez $\text{SO}(n, \mathbb{Z})$. To pozwala w sposób algorytmiczny wyznaczyć wszystkie spin struktury dla płaskich

rozmaitości, których grupa holonomii jest 2-grupą. W przypadku ogólnej grupy G autor jest w stanie stwierdzić istnienie spin struktur i ewentualnie wyliczyć za pomocą odpowiedniego algorytmu ich liczbę. W pracy [H7] autor omawia rozkłady reprezentacji holonomii nad ciałem liczb rzeczywistych. Algebra endomorfizmów każdego nieprzywiedlnego składnika takiego rozkładu jest izomorficzna z $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$. Podano systematykę poszukiwania grup, których nieprzywiedlny składnik reprezentacji holonomii może mieć kwaternionową algebrę endomorfizmów.

Niech M i L będą G -kratami takimi, że $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ jest modulem prostym, a $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ jest $\mathbb{Q}G$ -modulem jednorodnym zawierającym $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, tzn. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Głównym wynikiem pracy [H8] jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeżeli Γ jest grupą Bieberbacha, zdefiniowaną przez krótki ciąg dokładny (1) gdzie $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ jest modulem jednorodnym, to $\Gamma \cong L$.*

Grupa Bieberbacha Γ nazywa się rozproszona jeżeli każdy skończony podzbiór $A \subset \Gamma$ ma punkt ekstremalny tzn. $a \in A$ taki, że dla dowolnego $g \in \Gamma \setminus \{1\}$ zachodzi albo ga albo $g^{-1}a$ nie należy do A . W pracy [H5] autorzy podają listę rozproszonych grup Bieberbacha wymiaru ≤ 6 , osiągając to przy użyciu systemu komputerowego CARAT.

W pracy [H9] autorzy uzyskali charakteryzację nieprzywiedlnych reprezentacji minimalnej nierozwiązalnej grupy G . Głównym wynikiem tej pracy jest następujące eleganckie twierdzenie:

Twierdzenie. *Minimalnym wymiarem nierozwiązalnej grupy Bieberbacha jest 15.*

Konkluzja

Przedstawiony przez dr Rafała Lutowskiego cykl publikacji dowodzi, że kandydat prowadzi badania naukowe na wysokim poziomie. W swoich pracach potrafi odpowiednio łączyć wyniki teoretyczne z nowoczesnymi technikami obliczeniowymi. Zaawansowane obliczenia pomagają mu w weryfikacji hipotez i znajdowaniu nowych trudnych przykładów grup krystalograficznych o określonych własnościach. Otrzymane przez kandydata wyniki teoretyczne są z pewnością interesujące nie tylko dla matematyków specjalizujących się w teorii grup krystalograficznych.

Wniosek. Przedstawiona rozprawa spełnia wymogi formalne stawiane rozprawom habilitacyjnym określonymi w art. 219 ust. 1 pkt 2, ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" (Dz. U. z 2023 r. poz. 742 ze zm.). Wnoszę zatem o nadanie dr Rafałowi Lutowskiemu stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.

Piotr Krasoń