Autoreferat

1. Imię i nazwisko.

Rafał Lutowski

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

2010 stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki, uzyskany na Uniwersytecie Gdańskim
tytuł rozprawy: *Symetrie płaskich rozmaitości*

2005 stopień zawodowy magistra matematyki, uzyskany na Akademii Bydgoskiej im. Kazimierza Wielkiego

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych.

od 02.2011 adiunkt w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

10.2008-02.2011 asystent w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).

4.1. Omówienie głównego osiągnięcia

Lista publikacji wchodząca w skład cyklu powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem

Zastosowanie teorii reprezentacji i metod obliczeniowych w badaniu płaskich rozmaitości i struktur pokrewnych

wraz z określeniem indywidualnego wkładu w ich powstanie, w przypadku dzieł współautorskich, jest następująca:

[H1] R. Lutowski. *On symmetry of flat manifolds*. Exp. Math. 18.2 (2009), s. 201–204. DOI: 10.1080/10586458.2009.10128892.

[H2] R. Lutowski. *Finite outer automorphism groups of crystallographic groups*. Exp. Math. 22.4 (2013), s. 456–464. DOI: 10.1080/10586458.2013.838719.

[H3] R. Lutowski i A. Szczepański. *Holonomy groups of flat manifolds with the R_∞ property*. Fund. Math. 223.3 (2013), s. 195–205. DOI: 10.4064/fm223-3-1.

Mojego autorstwa jest dowód głównego twierdzenia w pracy – Twierdzenia A. Wnioski z głównego twierdzenia (Twierdzenia 1.4 i 1.5) oraz manuskrypt są efektem wspólnej pracy.

[H4] R. Lutowski i B. Putrycz. *Spin structures on flat manifolds*. J. Algebra 436 (2015), s. 277–291. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2015.03.037.

Mój główny wkład w pracę to zauważenie prawa zaprezentowanego we Wniosku 2 i skonstruowanie na jego podstawie algorytmu opisanego w Sekcjach 5 i 6. Zweryfikowałem obliczenia współautora, ujęte częściowo w Sekcji 8, dodając do niej wybrane statystyki. Przygotowałem manuskrypt artykułu.

[H5] A. Gąsior, R. Lutowski i A. Szczepański. *A short note about diffuse Bieberbach groups*. J. Algebra 494 (2018), s. 237–245. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2017.08.033.

Jestem autorem obliczeń klasyfikujących niskowymiarowe (nie)rozproszone grupy Bieberbacha, które są zaprezentowane w Twierdzeniu 1. Skonstruowałem również przykład służący udowodnieniu Stwierdzenia 1. Rozważania zaprezentowane na początku Sekcji 2, leżące u podstaw algorytmu determinującego rozproszoność grup Bieberbacha, są efektem wspólnych dyskusji. Wspólna jest również praca nad manuskryptem.

[H6] R. Lutowski i A. Szczepański. *Crystallographic groups with trivial center and outer automorphism group*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 164.2 (2018), s. 363–368. DOI: 10.1017/S0305004117000251.

Mój indywidualny wkład do głównego wyniku pracy (Twierdzenie 2.2) to dowód Stwierdzenia 2.1 oraz Lematów 2.6 i 2.7. Wspólna jest praca nad manuskryptem.

[H7] G. Hiss, R. Lutowski i A. Szczepański. *Flat manifolds with holonomy representation of quaternionic type*. Comm. Algebra 49.3 (2021), s. 1286–1294. DOI: 10.1080/00927872.2020.1834568.

Jestem autorem wyników obliczeniowych, opisanych w Sekcji 3 oraz w Uwadze 4.9. Kryteria dane w Stwierdzeniu 4.3 oraz manuskrypt są efektem wspólnej pracy.

[H8] R. Lutowski. *Flat manifolds with homogeneous holonomy representation*. Publ. Math. Debrecen 99.1-2 (2021), s. 117–122. DOI: 10.5486/pmd.2021.8881.

[H9] R. Lutowski i A. Szczepański. *Minimal Nonsolvable Bieberbach Groups*. Exp. Math. (paź. 2024). Published online. DOI: 10.1080/10586458.2024.2414311.

Początkowe definicje, lematy i wnioski Sekcji 2 i 3 są wynikiem wspólnych dyskusji. Pozostałe wyniki artykułu sa mojego autorstwa. Manuskrypt jest wynikiem wspólnej pracy.

W poniższym autoreferacie, oprócz głównego osiągnięcia, krótko opiszę moje pozostałe publikacje, wypisane jako [O1]-[O5], w paragrafie 4.2.

Zarys tematu badań

Słownik krystalografii online definiuje ją jako *gałąź nauki poświęconą badaniu własności molekularnych i krystalicznych struktur, z daleko idącymi zastosowaniami w mineralogii, chemii, fizyce, matematyce, biologii, metalurgii i badaniach materiałowych* (patrz [ODC]). Istotnym wkładem teorii grup w tę dziedzinę jest badanie symetrii wcześniej wspomnianych struktur. Symetrie te opisują grupy krystalograficzne.

Definicja. Niech $n \in \mathbb{N}$. *Grupą krystalograficzną* wymiaru n nazywamy dyskretną i kozwartą podgrupę grupy $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ izometrii n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Niskowymiarowe grupy krystalograficzne, oprócz powyżej wskazanego, mają zastosowanie w sztuce, czy architekturze (zobacz np. [CBG08], [Wey89]). Nie bez przyczyny w wymiarze 2 nazywamy je tapetowymi, a niektóre z nich – fryzowymi. Wagę tej rodziny grup dostrzeżono jeszcze w XIX wieku. Wśród opisu problemów postawionych przez Hilberta w związku z jego wystąpieniem na Kongresie Matematycznym w Paryżu w 1900 roku, znalazło się

Pytanie ([Hil02, s. 467]). *Czy w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej istnieje skończona liczba istotnie różnych grup przekształceń posiadających (zwarty) obszar fundamentalny?*

Pytanie to dotyczyło w istocie grup krystalograficznych, a w owym czasie odpowiedź była znana dla $n \leqslant 3$. Kilkanaście lat później Bieberbach, w artykułach [Bie11] i [Bie12], rozwiązał problem Hilberta, rozszerzając dodatkowo wynik o informacje dotyczące struktur oraz postaci izomorfizmów między grupami krystalograficznymi. Rezultaty przez niego przedstawione znane są obecnie jako trzy twierdzenia Bieberbacha:

Twierdzenie 1 ([Szc12, Twierdzenie 2.1]). *Niech $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Jeżeli $\Gamma \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ jest grupą krystalograficzną, to zbiór translacji $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ jest kratą w $\mathbb{R}^n$, skończonego indeksu w Γ i jest to maksymalna normalna podgrupa abelowa grupy Γ.*
2. *Dwie grupy krystalograficzne wymiaru n są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy są sprzężone w grupie $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$.*
3. *Istnieje skończenie wiele klas izomorfizmu grup krystalograficznych wymiaru n.*

Zwróćmy uwagę na utożsamienie wektora $a \in \mathbb{R}^n$ z translacją w $\mathbb{R}^n$, daną wzorem $x \mapsto x+a$. *Krata* to natomiast każda grupa izomorficzna z $\mathbb{Z}^n$, która rozpina $\mathbb{R}^n$.

Niech Γ będzie grupą krystalograficzną wymiaru n. Dzięki pierwszemu twierdzeniu Bieberbacha wpisuje się ona w następujący krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1, \tag{1}$$

gdzie L to wolna grupa abelowa rangi n i jest to maksymalna normalna podgrupa abelowa grupy Γ, a G – *grupa holonomii* grupy Γ – to grupa skończona. W 1957 roku Auslander i Kuranishi pokazali, że powyższy – czysto algebraiczny – opis definiuje, z dokładnością do izomorfizmu, grupy krystalograficzne (patrz [Cha86, Twierdzenie III.1.1]).

Niech funkcja $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(L)$, dana będzie wzorem $g \mapsto \varphi_g$, gdzie

$$\varphi_g(l) = \gamma l \gamma^{-1}, \tag{2}$$

dla $g \in G, l \in L$ i $\gamma \in \pi^{-1}(g) \subset \Gamma$ (przy utożsamieniu L z $\iota(L)$). Odwzorowanie φ to homomorfizm grup, który nazywamy *całkowitoliczbową reprezentacją holonomii*, lub po prostu *reprezentacją holonomii*, grupy Γ. Z maksymalności podgrupy L wynika, że φ jest wierna (patrz również [Cha86, Stwierdzenie I.6.1]). Reprezentacja ta nadaje L strukturę wiernego lewego G-modułu. Aby podkreślić fakt, że moduł ten daje się zrealizować jako krata w $\mathbb{R}^n$, będziemy go nazywali *G-kratą*. Przez analogię, G-kratami określamy takie G-moduły, które są również wolnymi $\mathbb{Z}$-modułami skończonej rangi.

Załóżmy teraz, że grupa krystalograficzna Γ jest beztorsyjna. Nazywamy ją wtedy *grupą Bieberbacha*, a przestrzeń orbit $X = \mathbb{R}^n/\Gamma$ jest zwartą rozmaitością riemannowską z zerową krzywizną sekcyjną (*płaską rozmaitością*). Co więcej, każda zwarta płaska rozmaitość, z dokładnością do izometrii, jest taką przestrzenią orbit (patrz [Wol11, Twierdzenie 3.3.2]). Nakryciem uniwersalnym rozmaitości X jest $\mathbb{R}^n$ i $\pi_1(X) = \Gamma$, a więc X jest przestrzenią Eilenberga-MacLane'a typu $K(\Gamma, 1)$ (patrz [Cha86, s. 52] i [Lüc10, Lemat 1.2]). Stąd topologia rozmaitości X jest w pełni opisana przez jej grupę podstawową. Okazuje się, że również struktura różniczkowa X jest wyznaczona przez Γ. Geometryczna wersja twierdzeń Bieberbacha ma bowiem postać:

Twierdzenie 2 ([Cha86, Twierdzenia 5.3-5.5], [Wol11, Twierdzenie 3.3.1]).

1. *Niech X będzie zwartą płaską rozmaitością. Wtedy X jest nakryta przez płaski torus, a odwzorowanie nakrywające jest lokalną izometrią. Ponadto grupa holonomii rozmaitości X jest skończona.*
2. *Niech X i Y będą zwartymi płaskimi rozmaitościami. Przypuśćmy, że $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$. Wtedy X i Y są afinicznie równoważne (zobacz [Cha86, Definicja II.3.3]).*
3. *W każdym wymiarze istnieje skończona liczba klas afinicznej równoważności zwartych płaskich rozmaitości.*

Wróćmy do wzoru (1) dla grupy Bieberbacha $\Gamma < O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Odwzorowania ι i π w ciągu dokładnym (1) możemy traktować jako obcięcia, odpowiednio do L i Γ, homomorfizmów

$$\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n), \pi\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \tag{3}$$

danych wzorami

$$\iota(a) := (I, a), \pi(A, a) := A,$$

dla $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n$. Wtedy $L = \iota^{-1}(\Gamma \cap \mathbb{R}^n)$ i wzór (2) przyjmuje postać:

$$\varphi_g(l) = g \cdot l.$$

Dostajemy więc, że każdy automorfizm φ_g grupy L jest zadany przez element g grupy holonomii $G = \pi(\Gamma)$ rozmaitości X (zobacz [Cha86, s. 52]). Stąd reprezentacja holonomii $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(L)$ grupy Bieberbacha Γ i reprezentacja holonomii rozmaitości X, rozumiana jako włożenie $G \hookrightarrow O(n)$, są równoważne jako reprezentacje rzeczywiste. Fakt ten stanowi kolejny związek między własnościami algebraicznymi grup Bieberbacha i geometrycznymi zwartych płaskich rozmaitości.

Bardzo ważną, zwłaszcza z punktu widzenia konstrukcji grup Bieberbacha, jest klasa kohomologii

$$\alpha \in H^1(G, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L/L) \cong H^2(G, L) \tag{4}$$

odpowiadająca rozszerzeniu (1). Niech

$$*\colon N_{\mathrm{GL}(L)}(\varphi(G)) \times H^1(G, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L/L) \to H^1(G, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L/L) \tag{5}$$

będzie działaniem zdefiniowanym w [Szc12, s. 65]. Wówczas Γ jest beztorsyjna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{res}_{\langle x \rangle}\, \alpha \neq 0$$

dla $x \in \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X}$ oznacza zbiór generatorów reprezentantów klas sprzężoności podgrup rzędu pierwszego grupy G. W takim wypadku α nazywamy *elementem specjalnym*.

Przez ponad sto lat od ukazania się artykułów Bieberbacha teoria grup krystalograficznych, w szczególności powiązana z nią geometria, była i jest systematycznie rozwijana. Wśród poruszanych zagadnień można znaleźć:

1. *Szeroko rozumianą teorię homologii i kohomologii.* Jako przykład można podać wskazanie w [Szc83] rodziny płaskich rozmaitości, które są wymiernymi homologicznymi sferami. Kohomologiczna sztywność rozważana jest w [KM09], [PS16]. Zagadnienia związane z klasami charakterystycznymi można znaleźć w artykułach [CMR10], [Vas70], a w szczególności rozważania na temat spin i spin^c struktur w [DSS06], [GS13], [GS14], [Gąs17], [HS08], [Pfä00], [PS10].
2. *Badanie grup holonomii.* W [AK57] Auslander i Kuranishi pokazali, że każda grupa skończona jest grupą holonomii pewnej zwartej płaskiej rozmaitości. Ponad 30 lat później Cliff i Weiss podali nowy dowód tego faktu i udowodnili, każda grupa skończona jest grupą holonomii pewnej płaskiej rozmaitości z pierwszą liczbą Bettiego równą 1 (zobacz [CW89, Twierdzenie 5]). Związki między grupami holonomii a pierwszą liczbą Bettiego rozważane były również w [Hil+87], [HS86].
3. *Badanie reprezentacji holonomii i jej wpływu na własności rozmaitości.* Z punktu widzenia zwartych płaskich rozmaitość, jedną z ważniejszych jest praca [HS91], gdzie pokazano, że reprezentacje holonomii grup Bieberbacha są przywiedlne. Badano związki reprezentacji holonomii z grupami symetrii, czy choćby z teorią punktów stałych (dokładniej – z własnością R_∞) zwartych płaskich rozmaitości i ogólniej – grup krystalograficznych (zobacz [DDP09], [DKT19], [HS97], [HS95]).
4. *Badanie algebraicznych własności grup Bieberbacha.* Grupy Bieberbacha mają swoje miejsce w teorii równań Yanga-Baxtera, jako tzw. grupy strukturalne określonej rodziny rozwiązań. Co więcej, pewne ich własności mają wpływ na własności samych rozwiązań. Z tego, chociaż nie tylko, punktu widzenia, obiektem zainteresowań są rozproszone (ang. *diffuse*) grupy Bieberbacha, czy też grupy z własnością unikalnego produktu (patrz [Bow00], [Gar21a], [Gar23], [GV98], [KR16], [LV19], [Pro88]).
5. *Problem klasyfikacji.* W literaturze znane są trzy metody konstrukcji płaskich rozmaitości (zobacz [Szc12, Rozdział 3]):
   - metoda Calabiego, który w 1957 wykazał pewnego rodzaju rozkład płaskich rozmaitości z dodatnią pierwszą liczbą Biettiego (patrz [Cal57], [Wol11, Twierdzenie 3.6.3]);
   - metoda Auslandera-Vasqueza, klasyfikująca rozmaitości z ustaloną grupa holonomii, bazująca na liczbie Vasqueza (patrz [Szc97], [Vas70]);
   - algorytm Zassenhausa, który opiera się na opisie grup krystalograficznych danym w pierwszym twierdzeniu Bieberbacha (patrz [CS01], [Zas48]).

Warto podkreślić, że algorytm Zassenhausa został użyty do sklasyfikowania grup krystalograficznych do wymiaru 6. Obliczenia zostały wykonane z użyciem pakietu komputerowego CARAT [OPS08].

6. *Badanie wyróżnionych rodzin zwartych płaskich rozmaitości.* Chciałbym tu zwrócić uwagę na (uogólnione) rozmaitości Hantzsche-Wendta (patrz np. [HW35], [MR99], [PS16], [Put07], [RS05], [Zim90]), jak i na większą rodzinę tzw. płaskich rozmaitości typu diagonalnego, do których należą np. rzeczywiste rozmaitości Botta, rozważane chociażby w [CMO17], [GS14], [GL24], [KM09]. Oprócz narzędzi geometrii i topologii, ich własności możemy badać metodami kombinatorycznymi, co sprawia, że są one wdzięcznym obiektem badań z użyciem metod obliczeniowych.
7. *Badanie deformacji płaskich rozmaitości* w sensie granicy Gromowa-Hausdorffa, które można traktować jako bardziej topologiczne, czy geometryczne podejście do ich badania. W ogólności, dla rozmaitości riemannowskich, takie zapadanie (ang. *collapsing*) jest opisane w [Fuk06]. Wiadomo, że granica płaskich rozmaitości nie musi mieć gładkiej struktury, a rozważania na temat konstrukcji i własności tychże granic można znaleźć w [Bet+22], [BDP18], [DP19].
8. *Badanie płaskich rozmaitości z dodatkowymi strukturami*. W szczególności mam tu na myśli rozmaitości ze strukturami kaehlerowskimi i problemy związane np. ze strukturą ich grup podstawowych, symetriami, klasyfikacją, czy deformacją struktur zespolonych. Zagadnienia te można odnaleźć w artykułach [BR11], [CC17], [DHS09], [DG23], [GL23], [Joh90].

Powyższa lista ilustruje wybrane – nie wszystkie – kierunki aktualnych lub możliwych badań nad szeroko rozumianą tematyką zwartych płaskich rozmaitości. W przypadku artykułów mojego autorstwa ograniczyłem się do preprintów, ponieważ prace opublikowane będą omawiane w ramach autoreferatu.

Uwaga. O ile nie będzie zaznaczone inaczej, to ilekroć w poniższym autoreferacie będzie mowa o rozmaitości, będę miał na myśli *rozmaitość riemannowską*. Dla płaskich rozmaitość będę zawsze zakładał ich *zwartość*.

Automorfizmy zewnętrzne grup krystalograficznych. Prace [H1], [H2], [H6].

Niech Γ będzie grupą krystalograficzną wymiaru n, zadaną przez krótki ciąg dokładny (1), któremu z kolei odpowiada klasa kohomologii α, patrz (4). Niech N_α oznacza stabilizator klasy kohomologii α względem działania (5), a $\mathrm{Aut}^0(\Gamma)$ – podgrupę tych automorfizmów, które indukują odwzorowania identyczności na L oraz G (patrz [Cha86, Definicja V.1.1]). Wtedy Diagram 1 jest przemienny, a jego wiersze i kolumny tworzą ciągi dokładne (patrz [Cha86, Twierdzenie V.1.1], [Szc12, Twierdzenie 5.1]). Co więcej, gdy Γ jest grupą Bieber-

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L/L^G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Inn}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}^0(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Aut}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & N_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
0 \arrow[r] & H^1(G,L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Out}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & N_\alpha/G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Diagram 1. Automorfizmy (zewnętrzne) grup krystalograficznych.

bacha, diagram ten daje istotną informację o strukturze grupy afinicznych równoważności płaskiej rozmaitości $X = \mathbb{R}^n/\Gamma$. Mamy bowiem krótki ciąg dokładny

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aff}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Aff}(X) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma) \longrightarrow 1,$$

gdzie $\mathrm{Aff}_0(X)$ jest torusem wymiaru równemu pierwszej liczbie Bettiego $b_1(X)$ rozmaitości X (patrz [Cha86, Twierdzenie V.6.1], [Szc12, Twierdzenie 5.2]). Szczególną rolę odgrywają więc płaskie rozmaitości ze skończoną pierwszą grupą homologii, a pytanie o to, które grupy skończone są ich grupami symetrii, postawione jest jako [Szc06, Problem 6].

Uwaga. Wcześniej wspomniana konstrukcja Calabiego jest innym wskaźnikiem istotnej roli, jaką pełnią płaskie rozmaitości z pierwszą liczbą Bettiego równą zero. Niech X będzie płaską rozmaitością. Jeżeli $q = b_1(X) > 0$, to istnieje płaska rozmaitość Y oraz skończona abelowa podgrupa $H < \mathrm{Aff}(Y)$, działająca wolno na q-wymiarowy torus $T^q = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ taka, że

$$X = (Y \times T^q)/H$$

(zobacz [Wol11, Twierdzenie 3.6.3]). Jeżeli $b_1(X) = 0$, to w sensie tej konstrukcji X jest obiektem nierozkładalnym.

Krótka praca **[H1]** miała na celu odpowiedź na pytanie o istnienie płaskiej rozmaitości z nietrywialną grupą symetrii nieparzystego rzędu. Poza przypadkiem trywialnym wszystkie wcześniej znane przykłady obejmowały grupy z parzystą liczbą elementów, więc – odwołując się do wspomnianego wyżej Problemu 6 z [Szc06] – pytanie to było naturalne i ważne. Odpowiedź udało się uzyskać, wykorzystując przykład grupy Bieberbacha z jednoelementową grupą automorfizmów zewnętrznych, dany przez Waldmüllera w [Wal03]. Modyfikując jego konstrukcję, pokazałem, że istnieje grupa Bieberbacha z trywialnym centrum i grupą automorfizmów zewnętrznych rzędu 3. Chciałbym zwrócić uwagę na eksperymentalny charakter nie tylko znalezienia G-kraty, którą w pracy oznaczam jako M_2, ale wyznaczenie grupy $C_{\mathrm{Aut}(M_2)}(G)$ elementów odwracalnych pierścienia $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(M_2)$. Samo znalezienie „nietrywialnego" generatora B tegoż pierścienia było problemem liniowym. Określenie relacji B z identycznością było natomiast efektem prób i błędów. Dla pełnego obrazu dodam, że istnieją algorytmy, zaimplementowane np. w pakiecie CARAT [OPS08], pozwalające wyznaczyć centralizatory skończonych podgrup $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. W wypadku M_2 mieliśmy jednak $n = 32$, co było zbyt dużym wyzwaniem obliczeniowym (ośmielam się twierdzić, że nadal tak jest).

W artykule udowodniłem również Twierdzenie 3.4 o postaci grupy automorfizmów zewnętrznych produktu grup Bieberbacha z trywialnym centrum. W szczególnym przypadku mamy, że dowolna grupa permutacji skończonego zbioru daje się zrealizować jako grupa symetrii pewnej płaskiej rozmaitości. Dostajemy więc, wykorzystując twierdzenie Cayleya, że każda grupa skończona jest podgrupą skończonego indeksu grupy symetrii pewnej płaskiej rozmaitości z pierwszą liczbą Bettiego równą zero.

W pracy **[H2]** podjąłem temat algorytmicznego podejścia do wyznaczenia grup automorfizmów zewnętrznych grup krystalograficznych przyjmując założenie, że są one skończone. Samo kryterium skończoności zostało podane w [Szc96, Twierdzenie A] (należy zwrócić uwagę, że założenie beztorsyjności nie jest w tym twierdzeniu potrzebne).

Niech Γ będzie grupą krystalograficzną jak wyżej. W obliczeniowej teorii grup krystalograficznych wygodnie jest ustalić bazę L i w ten sposób utożsamić ją z $\mathbb{Z}^n$. Ponieważ reprezentacja holonomii $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ jest wierna, więc G możemy utożsamiać z $\varphi(G)$.

Kluczem do obliczenia $\mathrm{Out}(\Gamma)$ jest znajomość dwóch elementów Diagramu 1: N_α oraz $H^1(G, \mathbb{Z}^n)$. Z kolei, głównym narzędziem do wyznaczenia tych obiektów jest rozwiązanie układu równań postaci

$$AX = B, \tag{6}$$

gdzie $A \in M_{n\times m}(\mathbb{Z}), X, B \in M_{n\times 1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$. Przez $M_{k\times l}(R)$ rozumiem zbiór macierzy o k wierszach i l kolumnach, o współczynnikach ze zbioru R. Układ (6) rozwiązujemy poprzez sprowadzenie A do postaci diagonalnej (np. postaci normalnej Smitha). Należy zauważyć, że zarówno dla obliczenia N_α, jak i $H^1(G, \mathbb{Z}^n)$, macierz A jest taka sama. Używając dodatkowo długiego ciągu kohomologii, [H2, Twierdzenie 4.5] określa generatory grup środkowego wiersza Diagramu 1. W szczególności dostajemy, że reprezentantami klas kohomologii $H^1(G, \mathbb{Z}^n)$ są elementy $\mathbb{Q}^n$, na które N_α/G działa poprzez mnożenie macierzy. Narzędzia, które daje

chociażby [Joh97, Stwierdzenie 10.1], pozwalają na skonstruowanie prezentacji grupy $\mathrm{Out}(\Gamma)$ jako rozszerzenia $H^1(G,\mathbb{Z}^n)$ przez N_α/G.

Kontynuując tematykę symetrii, praca **[H6]** podejmuje problematykę *zupełnych* grup krystalograficznych. Przypomnijmy, że grupę nazywamy zupełną (ang. *complete*), jeżeli jej centrum i grupa automorfizmów zewnętrznych są trywialne. W [Wal03] Waldmüller skonstruował zupełną grupę Bieberbacha, z kolei w [BL05] autorzy udowodnili istnienie dla każdego $n \geqslant 3$ zwartej hiperbolicznej n-rozmaitości z zupełną grupą podstawową.

Narzędziem służącym dowodowi głównego wyniku pracy jest ciąg (Γ_i), gdzie

$$\Gamma_0 := \Gamma \text{ oraz } \Gamma_{i+1} := N_{\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)}(\Gamma_i) \text{ dla } i \geqslant 0. \tag{7}$$

Okazuje się, że jeżeli

$$Z(\Gamma) = 1, |\,\mathrm{Out}(\Gamma)| < \infty \text{ oraz } H^1(G,L) = 0, \tag{8}$$

to powyższy ciąg się stabilizuje, a jego elementami są grupy krystalograficzne. Oznacza to w szczególności, że dla pewnego $N \in \mathbb{N}$ grupa Γ_N jest zupełna.

Wykorzystując [H1, Twierdzenie 3.4] dla produktu pewnych dwóch grup krystalograficznych wymiaru 2 i 3, otrzymujemy główny wynik pracy [H6]:

Twierdzenie 3 ([H6, Twierdzenie 2.2]). *Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n-wymiarowa zupełna grupa krystalograficzna.*

Uwaga. Przy spełnieniu warunków (8) mamy, że $\Gamma_{i+1} \cong \mathrm{Aut}(\Gamma_i)$, dla $i \geqslant 0$. Powyższe rozważania dają więc warunek wystarczający na to, aby *wieża automorfizmów* (patrz [Tho85]) grupy krystalograficznej kończyła się po skończonej ilości kroków. Dostajemy ponadto, że w każdym wymiarze większym niż 1 istnieje grupa krystalograficzna ze skończoną wieżą automorfizmów.

Teoria punktów stałych. Praca [H3].

Znalezienie punktów stałych odwzorowań przestrzeni topologicznej w siebie było obiektem zainteresowań matematyków od samego początku rozwoju topologii, patrz np. [Bro99]. W późniejszym okresie postawiono trochę bardziej ogólne pytanie, które do dzisiaj jest punktem wyjścia w teorii punktu stałego: jaka jest najmniejsza liczba punktów stałych dla odwzorowań w klasie homotopii danej funkcji? Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $f\colon X \to X$ jest ciągłym odwzorowaniem zamkniętej n-wymiarowej gładkiej rozmaitości X w siebie. W pierwszej połowie XX wieku zostały zdefiniowane niezmienniki klasy homotopii f, które dają pewne informacje o punktach stałych odwzorowań homotopijnych z f. Są to: liczba Lefschetza $L(f)$, zadana odwzorowaniami indukowanymi przez f na homologiach wymiernych X, liczby Nielsena $N(f)$ oraz Reidemeistera $R(f)$, które możemy zdefiniować przy pomocy odwzorowań nakrywających f w nakryciu uniwersalnym $\widetilde{X}$. Szczególnie użyteczna jest liczba Nielsena, ponieważ:

a) daje ona ograniczenie dolne na liczbę punktów stałych w całej klasie homotopii f, w szczególności $N(f)$ jest całkowitą liczbą nieujemną (patrz [Jia83, Twierdzenie 4.3]);
b) jeżeli $n \geqslant 3$, to istnieje odwzorowanie homotopijne z f, które ma $N(f)$ punktów stałych (patrz [Jia83, Twierdzenie 6.3], [Jia81]).

Niedogodnością stosowania liczby Nielsena jest trudność jej wyznaczenia, zwłaszcza w porównaniu z pozostałymi dwoma niezmiennikami. W ogólności mamy nierówność $N(f) \leqslant R(f)$, a jednym z kierunków badań jest szukanie warunków na to, aby była to równość. Pewnego rodzaju ekstremum zależności liczb Nielsena i Reidemeistera może być z kolei przypadek, w którym są one różne dla całej klasy odwzorowań. Jedną z takich sytuacji opisuje własność R_∞:

Definicja. Rozmaitość X ma własność R_∞, jeżeli $R(f) = \infty$ dla każdego homeomorfizmu $f\colon X \to X$.

Liczba Reidemeistera może być zdefiniowana na poziomie grupy podstawowej rozmaitości X. Jeżeli

$$f_\sharp \colon \pi_1(X) \to \pi_1(X)$$

jest homomorfizmem indukowanym przez f, to $R(f)$ zlicza tzw. *klasy $f_\sharp$-sprzężoności*, nazywane również *skręconymi klasami sprzężoności* lub *klasami Reidemeistera odwzorowania f* (zobacz [Jia83, Sekcje I.1 i II.1]). Jasne jest również, że liczba Reidemeistera może być zdefiniowana dla dowolnej grupy i w tym referacie mówimy o własności R_∞ zarówno płaskich rozmaitości, jak i grup Bieberbacha.

Praca **[H3]** podejmuje temat związku reprezentacji holonomii z własnością R_∞ grupy Bieberbacha. Dzięki Twierdzeniu 5.9 z [DDP09] wiadomo, że sama reprezentacja holonomii nie zawsze determinuje tę własność. Może jednak to robić pod warunkami, które opisuje [DDP09, Twierdzenie 4.7]. Założenia tego twierdzenia implikują pewne własności reprezentacji holonomii, które są podstawą postawienia następującej hipotezy.

Hipoteza 1 ([DDP09, Hipoteza 4.8]). *Niech $\varphi \colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ będzie wierną $\mathbb{R}$-nieprzywiedlną reprezentacją skończonej grupy $G \neq 1$. Przypuśćmy, że n jest liczbą nieparzystą. Wtedy dla każdego elementu $D \in N_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})}(\varphi(G))$ istnieje $a \in G$ takie, że $\varphi(a)D$ ma wartość własną* 1.

Należy zwrócić uwagę, że [DDP09, Przykład 4.9] pokazuje, iż założenie nieparzystości liczby n jest istotne. Głównym celem pracy [H3] jest dowód, że dla pewnej rodziny grup powyższa hipoteza jest prawdziwa:

Twierdzenie 4 ([H3, Twierdzenie A]). *Hipoteza 1 jest prawdziwa, jeżeli G posiada nietrywialną normalną podgrupę abelową.*

W szczególności dostajemy warunek wystarczający na to, aby płaskie rozmaitości z rozwiązalną grupą holonomii miały własność R_∞:

Twierdzenie 5 ([H3, Twierdzenie 1.4]). *Niech Γ będzie grupą Bieberbacha z reprezentacją holonomii $\varphi \colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, gdzie G jest grupą rozwiązalną. Przypuśćmy, że d jest liczbą nieparzystą i $\varphi' \colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ jest $\mathbb{R}$-nieprzywiedlną podreprezentacją φ krotności* 1. *Załóżmy ponadto, że jeżeli podreprezentacja $\tilde{\varphi} \colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ reprezentacji φ nie jest równoważna φ', to grupy $\varphi'(G)$ i $\tilde{\varphi}(G)$ nie są sprzężone w $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$. Wtedy Γ ma własność R_∞.*

Spin struktury na płaskich rozmaitościach. Praca [H4].

Niech $n \in \mathbb{N}$. Grupa $\mathrm{Spin}(n)$ to podgrupa grupy elementów odwracalnych algebry Clifforda C_n. Jest ona podwójnym nakryciem, a dla $n \geqslant 3$ również nakryciem uniwersalnym, grupy ortogonalnej $\mathrm{SO}(n)$. Oznaczmy przez $\lambda \colon \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ homomorfizm nakrywający. Załóżmy, że X jest orientowalną zamkniętą n-wymiarową rozmaitością, a Q to $\mathrm{SO}(n)$-wiązka ortonormalnych baz nad X. *Spin struktura* na X to ekwiwariantne podniesienie Q, względem λ, do $\mathrm{Spin}(n)$-wiązki głównej. Spin struktury i powiązane z nimi operatory Diraca są ważnym obiektem badań nie tylko z geometrycznego, ale również fizycznego punktu widzenia.

W przypadku, gdy X jest płaska, to [Pfä00, Stwierdzenie 3.2] i [HS08, Stwierdzenie 2.1] dają algebraiczne narzędzie do klasyfikacji spin struktur. W gruncie rzeczy wynikający z tych faktów [H4, Wniosek 1] stanowi, że interesuje nas przemienność diagramu

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda"] \\ G \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd} \tag{9}$$

gdzie $\rho \colon G \to \mathrm{SO}(n)$ to reprezentacja równoważna identyczności $id \colon G \to G \subset \mathrm{SO}(n)$. Znalezienie odpowiedniej reprezentacji ρ pozwala na przezwyciężenie największej trudności w zastosowaniu powyższego kryterium szukania spin struktur na X, którą jest wyznaczenie $\lambda^{-1}(\rho(G))$. W ogólności wymaga to stosowania doraźnych

metod, co dobrze ilustruje artykuł [PS10]. W wyższych wymiarach lub większej ilości badanych rozmaitości takie podejście jest co najmniej kłopotliwe. Wiemy jednak, iż X jest spin wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{R}^n/\pi^{-1}(\mathrm{Syl}_2 G)$ jest spin rozmaitością, gdzie $\mathrm{Syl}_2 G$ oznacza 2-podgrupę Sylowa grupy G (zobacz [DSS06, Stwierdzenie 1]). Załóżmy więc, że G jest 2-grupą. W tej sytuacji jesteśmy w stanie skonstruować reprezentację ρ w taki sposób, aby znajdowanie spin struktur na X było możliwe przy pomocy algorytmu. Dla 2-grup [EM79, Twierdzenie 1.10] daje bowiem następujący wniosek.

Wniosek ([H4, Wniosek 2]). *Każda nieprzywiedlna reprezentacja wymierna* 2*-grupy jest indukowana z wymiernej reprezentacji stopnia* 1.

Dostajemy, że istnieje reprezentacja $\rho\colon G \to \mathrm{SO}(n,\mathbb{Z})$, równoważną identyczności, gdzie

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \cap \mathrm{SO}(n).$$

W konsekwencji, w diagramie (9) możemy zamienić $\mathrm{SO}(n)$ na $\mathrm{SO}(n,\mathbb{Z})$. Zmiana ta na pierwszy rzut oka wydaje się niewielka, ale [H4, Lemat 7] daje nam wzory na przeciwobrazy generatorów, a w konsekwencji – wszystkich elementów grupy $\mathrm{SO}(n,\mathbb{Z})$, względem odwzorowania λ. Wiemy więc, jak mogą wyglądać homomorfizmy ε obcięte do zbioru generatorów grupy Γ, a ponieważ Γ jest skończenie prezentowalna, jesteśmy w stanie wyznaczyć wszystkie te odwzorowania. Ostatecznie, możemy wyznaczyć wszystkie spin struktury dla tych płaskich rozmaitości, dla których grupa holonomii to 2-grupa.

Powróćmy do sytuacji, w której grupa holonomii G rozmaitości X jest dowolna. W takim ogólnym przypadku nie możemy, przy pomocy algorytmu, sklasyfikować spin struktur na X. Jesteśmy w stanie sprawdzić, czy X takowe posiada. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, korzystając z faktu, że są one w bijekcji z elementami grupy kohomologii $H^1(X,\mathbb{Z}/2) \cong H^1(\Gamma,\mathbb{Z}/2)$, możemy również – wykorzystując np. pakiet HAPcryst [RG22] – podać ich liczbę.

W ostatniej sekcji artykułu wypisujemy informacje o wymiarze 5, jak również statystyki dotyczące ilości spin rozmaitości płaskich w wymiarach 5 i 6. Aktualnie te i inne informacje o niskowymiarowych rozmaitościach płaskich można znaleźć na stronie www [Lut21].

Własności reprezentacji holonomii. Prace [H7], [H8].

Grupa Bieberbacha Γ dana jest przez krótki ciąg dokładny (1), a więc definiuje ją G-krata L oraz element specjalny α. Zwróćmy uwagę na oczywisty fakt – te dwa obiekty nie są od siebie niezależne. Dopiero mając odpowiedni G-moduł, jesteśmy w stanie skonstruować grupę Bieberbacha, dla której zadaje on reprezentację holonomii. Ponadto, jak opisałem powyżej, pewne własności płaskich rozmaitości zależą wprost od własności ich reprezentacji holonomii, stąd ich badanie stanowi ważną składową całej teorii.

Artykuł **[H7]** podejmuje problematykę własności rozkładu reprezentacji holonomii nad ciałem liczb rzeczywistych. Wiadomo, że algebra endomorfizmów każdego nieprzywiedlnego składnika takiego rozkładu jest izomorficzna z $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$. Punktem wyjścia pracy jest założenie, że wszystkie te proste składniki mają izomorficzne algebry endomorfizmów. Możemy mówić wtedy, że płaska rozmaitość jest typu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$. W przypadku zespolonym i kwaternionowym daje to przykłady w pewnym sensie nietrywialnych płaskich rozmaitości odpowiednio kaehlerowskich i hiperkaehlerowskich. Na podstawie Stwierdzeń 7.1 i 7.2 z [Szc12] można bowiem wywnioskować, że jeżeli φ jest reprezentacją holonomii płaskiej rozmaitości, to przy pomocy $\varphi \oplus \varphi$ zbudujemy płaską rozmaitość Kaehlera. Ta sama konstrukcja pozwala nam z płaskich rozmaitości Kaehlera otrzymać płaskie rozmaitości hiperkaehlerowskie.

W literaturze znane były już płaskie rozmaitości typu $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, których grupy holonomii to odpowiednio elementarne 2 i 3 grupy abelowe. Nie było wiadomo natomiast, czy w ogóle istnieje płaska rozmaitość X typu $\mathbb{H}$. Ważny etap poszukiwań stanowiło określenie warunków koniecznych dla grupy i reprezentacji holonomii X. W szczególności okazało się, że istotną rolę mogą odegrać 2-grupy. Mając dany dość duży zasób informacji

o takiej potencjalnej grupie holonomii, można było przystąpić do systematycznego przeszukiwania katalogu grup skończonych w programie GAP [20].

Okazuje się, że do rzędu 64 istnieje tylko jedna grupa G spełniająca warunki dane przez [H7, Stwierdzenie 4.3]. Oznaczona jest w GAP jako $[64, 245]$ i jest centralnym rozszerzeniem $C_2^2 = \langle a, b\rangle$ przez C_2^4, gdzie C_2 oznacza grupę cykliczną rzędu 2. Grupa $\mathrm{Aut}(G)$ działa przechodnio na zbiór $\mathcal{X} := \{a, b, ab\}$ nietrywialnych elementów centrum $Z(G)$ grupy G. Ponadto, $\mathcal{X}$ zawiera wszystkie elementy rzędu 2 w G. Znalezienie elementu specjalnego można więc sprowadzić do znalezienia kraty L_a takiej, że istnieje element $\alpha_a \in H^2(G, L_a)$, którego ograniczenie $\mathrm{res}_{\langle a\rangle}\, \alpha_a$ do $\langle a\rangle$ jest niezerowe. Aby tak skonstruowana rozmaitość była typu $\mathbb{H}$ wymagamy dodatkowo, aby charakter $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L_a$ był sumą charakterów o współczynniku Frobeniusa-Schura równym -1. Dobry wybór dla L_a to składnik w *rozkładzie kanonicznym* modułu $\mathrm{ind}_{\langle a\rangle}^{G}\, \mathbb{Z}$, który z kolei jest składnikiem tzw. *kraty standardowej* (patrz odpowiednio [Ser77, Rozdział I] i [CW89]). Ranga $\mathbb{Z}$-kraty L_a to 16, więc istnieje 48-wymiarowa rozmaitość typu kwaternionowego.

W kontekście obliczeń komputerowych związanych z powyższym wynikiem chciałbym zwrócić uwagę na pewien fakt. Moduł $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} L_a$ rozkłada się na dwa izomorficzne podmoduły wymiaru 8. W szczególności oznacza to, że istnieje G-krata L' rangi 8 taka, że $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L'$ jest nieprzywiedlna oraz $\mathrm{End}_{\mathbb{R}G}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} L') \cong \mathbb{H}$. W trakcie badań udało się skonstruować L', jednak $\mathrm{res}_{\langle a\rangle}\, (H^2(G, L')) = 0$, więc L' nie nadawała się do opisanej powyżej konstrukcji elementu specjalnego. Kolejnym – naturalnym – krokiem było zbadanie wszystkich podmodułów modułu L', z dokładnością do izomorfizmu. W celu ich znalezienia, uruchomiona została jedna z aplikacji pakietu CARAT. Po kilku tygodniach działania program nie zakończył swojej pracy. Mimo upływu dwudziestu lat od powstania wspomnianego oprogramowania i ogromnym skoku wydajnościowym sprzętu komputerowego, grupy macierzowe niezbyt dużego wymiaru 8 mogą być nadal dużym wyzwaniem.

Omawiany powyżej artykuł stanowi dobrą ilustrację trudności, jakie przynosi poszukiwanie płaskich rozmaitości o określonych własnościach. Podstawą i jednocześnie największym wyzwaniem okazuje się często znalezienie reprezentacji holonomii. Dzięki [HS91] wiadomo, że jej rozkład nad ciałem liczb wymiernych posiada co najmniej dwa nieprzywiedlne składniki. Artykuł **[H8]** kontynuuje tematykę podjętą przez Hissa i Szczepańskiego. Okazuje się, że ich wynik można uogólnić i pokazać, że w rozkładzie reprezentacji holonomii nad $\mathbb{Q}$ musimy znaleźć nie tylko co najmniej dwa składniki – co najmniej dwa z nich muszą być nieizomorficzne. Sama idea uogólnienia jest następująca. Załóżmy, że M i L to G-kraty takie, że $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ jest modułem prostym, a $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ to $\mathbb{Q}G$-moduł jednorodny zawierający $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, tzn.

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M.$$

Wtedy *zbiory* składników prostych modułów $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ oraz $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ są sobie równe. Ta informacja prowadzi do wniosku, że warunki konieczne dla istnienia elementu specjalnego w $H^2(G, M)$ oraz $H^2(G, L)$ są takie same. Załóżmy, że $G \neq 1$ i oznaczmy przez $\mathrm{Soc}\, G$ grupę generowaną przez minimalne podgrupy normalne G. Wniosek 3.4 z [H8] mówi o tym, że aby przy pomocy G-kraty L można było zdefiniować grupę Bieberbacha (1), to $\mathrm{Soc}\, G$ musi być produktem elementarnych grup abelowych. Tu z kolei nasze założenie o istnieniu elementu specjalnego implikuje, że L nie jest wiernym G-modułem. Ostatecznie, jedyną możliwością na użycie L do zbudowania beztorsyjnego rozszerzenia (1) jest sytuacja, w której $G = 1$ (zobacz [H8, Sekcja 4]). Dostajemy główny wynik pracy który, zgodnie z używanymi w tym referacie oznaczeniami, ma następującą postać.

Twierdzenie 6 ([H8, Twierdzenie 1]). *Jeżeli Γ jest grupą Bieberbacha, zdefiniowaną przez ciąg* (1)*, gdzie $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} L$ jest modułem jednorodnym, to $\Gamma \cong L$.*

Powyższe twierdzenie daje nam istotne informacje o zwartych płaskich rozmaitościach Kaehlera. Jeżeli X jest taką rozmaitością, zespolonego wymiaru n, $\Gamma = \pi_1(X)$ zadaje ciąg dokładny (1), to Γ możemy zrealizować jako dyskretną, kozwartą i beztorsyjną podgrupę $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$. W takim wypadku reprezentacja holonomii jest postaci $\varphi_c \colon G \to U(n)$ (zobacz [Szc12, Stwierdzenie 7.1]). Okazuje się, że jednorodność reprezentacji φ_c implikuje jednorodność $\mathbb{Q}G$-modułu $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$. Jest możliwe tylko wtedy, gdy $G = 1$, a więc X jest zwartym pła-

skim torusem zespolonym. Dostajemy w szczególności analog głównego wyniku pracy [HS91] dla przypadku zespolonego, a dokładniej – fakt, że reprezentacja φ_c jest rozkładalna.

Rozproszone i rozwiązalne grupy Bieberbacha. Prace [H5], [H9].

Zwrócę teraz uwagę na te aspekty związane z grupami Bieberbacha, które – przynajmniej na pierwszy rzut oka – są bardziej algebraiczne, niż geometryczne. Prace [H5], [H9] ograniczają badany przypadek do takiego, w którym grupy te są rozwiązalne. Rozproszona (ang. *diffuse*) grupa Bieberbacha musi być rozwiązalna, chociaż powyższe pojęcia łączy nie tylko ta prosta implikacja. Dość powiedzieć, że zarówno grupy rozproszone, jak i rozwiązalne, są obiektem zainteresowania badaczy zajmujących się równaniami Yanga-Baxtera i związanymi z nimi teoriami klamer, grup strukturalnych i dołączonych (por. [BCV18], [LV19], [Rum24]). Należy zauważyć, że rozproszoność implikuje własność unikalnego produktu (ang. *unique product property*), co z kolei daje prawdziwość hipotezy Kaplańskiego o elementach odwracalnych w pierścieniach grupowych. Nie sposób nie wspomnieć w tym miejscu o przykładach podanych w [Gar21b], [Gar23], które pokazują, że w ogólności hipoteza ta nie jest prawdziwa, a które wykorzystują jedną z trójwymiarowych grup Bieberbacha, tzw. grupę Hantzsche-Wendta.

Wspomnianą powyżej grupę Hantzsche-Wendta możemy również spotkać w literaturze pod nazwą *grupa Promysłowa* Δ_P. Pochodzi ona od nazwiska autora, który w pracy [Pro88] pokazał, że nie ma ona własności unikalnego produktu. W pewnym sensie jest ona do dzisiaj generycznym przykładem takiej grupy – wszystkie znane przykłady grup Bieberbacha bez własności unikalnego produktu zawierają Δ_P. Jedną z motywacji powstania pracy **[H5]** była odpowiedź na analogiczne pytanie dla grup rozproszonych. Dokładniej, autorzy artykułu [KR16] pytali o minimalny wymiar d nierozproszonej grupy Bieberbacha, która nie zawiera grupy Promysłowa. Klasyfikując pod kątem rozproszoności grupy wymiaru co najwyżej cztery, stwierdzili, że $d \geqslant 5$, a używając przykładu z holonomią C_3^2, dostali $d \leqslant 8$. Jednym z aspektów badań zaprezentowanych w artykule [H5] było stworzenie algorytmu klasyfikującego rozproszone grupy Bieberbacha. Sama idea algorytmu polega na konstrukcji Calabiego. Dla dowolnej grupy Bieberbacha Γ pozwala ona zbudować taki skończony ciąg podnormalny grup Bieberbacha

$$\Gamma = \Gamma_0 \rhd \Gamma_1 \rhd \ldots \rhd \Gamma_k,$$

w którym każdy z faktorów $\Gamma_0/\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k-1}/\Gamma_k$ jest nietrywialną wolną grupą abelową. Wtedy Γ jest rozproszona wtedy i tylko wtedy, gdy Γ_k to wolna grupa abelowa. Zastosowaliśmy nasz algorytm do grup wymiaru mniejszego lub równego 6. Jego podsumowaniem jest [H5, Twierdzenie 1], a szczegóły prezentuje strona www [Lut21]. Odkryliśmy, że lista podana w [KR16] pomija jedną nierozproszoną grupę wymiaru 4, która jednak zawiera Δ_P, więc konkluzja tejże pracy, dotycząca liczby d, pozostaje poprawna. Okazało się, że wśród pięciowymiarowych nierozproszonych grup Bieberbacha znajduje się taka, która nie zawiera grupy Δ_P.

Problem, którego rozwiązanie opisane jest w pracy **[H9]**, dotyczy ogólniejszego zagadnienia minimalnej długości Hirscha beztorsyjnych grup wirtualnie rozwiązalnych, postawionego przez Jonathana Hillmana. Zapytał on współautora pracy, czy wiadomo coś na ten temat w przypadku beztorsyjnych grup wirtualnie abelowych, a więc dokładnie grup Bieberbacha. Oczywiście, długość Hirscha oznacza tu po prostu wymiar. Chociaż na pierwszy rzut oka problem wydaje się czysto algebraiczny, ma swoje uzasadnienie topologiczne. Znalezienie nierozwiązalnej grupy Bieberbacha minimalnego wymiaru pozwala bowiem w szczególności na znalezienie doskonałej grupy Bieberbacha, a więc i płaskiej rozmaitości z trywialną pierwszą grupą homologii (patrz [Bel]).

Punktem wyjścia naszych rozważań były:

a) prosty do pokazania fakt mówiący o tym, że o rozwiązalności grupy Bieberbacha decyduje rozwiązalność jej grupy holonomii;
b) [Ple89, Twierdzenie V.1], które stanowi o istnieniu grup Bieberbacha z prostą nieabelową grupą holonomii w wymiarze 15.

Naturalnym wydało się przyjęcie hipotezy, że do wymiaru 15 wszystkie grupy Bieberbacha są rozwiązalne. W celu jej wykazania, dzięki twierdzeniom Bieberbacha, wystarczyło sprawdzić skończenie wiele grup. Niestety, grupy Bieberbacha są sklasyfikowane tylko do wymiaru 6, a wspomniane wcześniej problemy z obliczeniami już w wymiarze 8 sugerują, że w najbliższym czasie klasyfikacja ta się nie rozszerzy. W rezultacie nie mogliśmy skupić się jedynie na szukaniu najmniejszego wymiaru. Szukanie potencjalnych grup holonomii tylko przy założeniu ich nierozwiązalności mogło być poza naszymi możliwościami obliczeniowymi. Należało więc zminimalizować również grupy holonomii.

Powyższa idea leży u podstaw definicji *minimalnej nierozwiązalnej grupy Bieberbacha*. Załóżmy więc, że Γ dana rozszerzeniem (1) jest taką grupą. Implikuje to, że G jest minimalną nierozwiązalną grupą skończoną. Dzięki badaniu rozkładu reprezentacji holonomii nad ciałem liczb wymiernych, a więc $\mathbb{Q}G$-modułu $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$, dostajemy, że G musi posiadać co najmniej dwie nieprzywiedlne i nierównoważne nad $\mathbb{Q}$ reprezentacje postaci $G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $4 \leqslant n \leqslant 10$. Jest to pierwsza kluczowa dla nas informacja. Załóżmy, że $4 \leqslant n \leqslant 10$. Dzięki wynikom Dade'a [Dad65], Pleskena i Pohsta [PP77a], [PP77b], [PP80a], [PP80b], [PP80c] oraz Souvigniera [Sou94] wiemy, jak wyglądają maksymalne nieprzywiedlne podgrupy $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ i możemy szukać ich minimalnych podgrup nierozwiązalnych. Zadanie to okazuje się jednak kosztowne obliczeniowo, zwłaszcza dla grup dużego rzędu i $n \in \{9, 10\}$. Mamy jednak w ręku drugą kluczową informację – G to grupa doskonała, a dzięki klasyfikacji Pleskena i Holta [HP89], uzupełnionej niedawno przez Hulpke [Hul22], znamy grupy doskonałe do rzędu $2 \cdot 10^6$. Z wykorzystaniem powyższych baz danych i narzędzi teorii reprezentacji można udowodnić:

Stwierdzenie ([H9, Stwierdzenie 4.6]). *Jeżeli $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ jest nieprzywiedlną reprezentacją minimalnej nierozwiązalnej grupy G, gdzie $4 \leqslant n \leqslant 10$, to $\rho(G)$ jest grupą:*

a) *prostą H, gdzie $H \in \{A_5, L_3(2), L_2(8)\}$ lub*
b) *$H2^1$ – centralnym nietrywialnym rozszerzeniem C_2 przez grupę prostą H, gdzie $H \in \{A_5, L_3(2)\}$ lub*
c) *$L_3(2)N2^3$ – nietrywialnym rozszerzeniem C_2^3 przez $L_3(2)$.*

Rozpatrując możliwe przypadki rozkładu reprezentacji holonomii grupy Γ jesteśmy w stanie określić, jak wygląda grupa G. Analizując możliwe wymiary Γ, te do 12 włącznie są wykluczone z użyciem wspomnianego wcześniej Twierdzenia V.1 z [Ple89] oraz Twierdzenia 6. Wymiary 13 i 14 wymagają zagłębienia się w argumenty leżące u podstaw wyników pracy [HS91], a które ilustrują istotny wkład lokalnej teorii reprezentacji w teorię grup Bieberbacha. Wykluczając te wymiary, dostajemy ostatecznie główny wynik pracy:

Twierdzenie 7 ([H9, Twierdzenie 1]). *Minimalnym wymiarem nierozwiązalnej grupy Bieberbacha jest* 15.

4.2. Opis pozostałych osiągnięć

Lista artykułów niewchodząca w skład opisanego powyżej cyklu jest następująca:

[O1] R. Lutowski i Z. Marciniak. *Affine representations of Fibonacci groups and flat manifolds*. Comm. Algebra 46.6 (2018), s. 2738–2741. DOI: 10.1080/00927872.2017.1399412.

[O2] R. Lutowski, N. Petrosyan i A. Szczepański. *Classification of spin structures on four-dimensional almost-flat manifolds*. Mathematika 64.1 (2018), s. 253–266. DOI: 10.1112/S0025579317000560.

[O3] R. Lutowski, N. Petrosyan, J. Popko i A. Szczepański. *Spin structures of flat manifolds of diagonal type*. Homology Homotopy Appl. 21.2 (2019), s. 333–344. DOI: 10.4310/HHA.2019.v21.n2.a18.

[O4] E. Acri, R. Lutowski i L. Vendramin. *Retractability of solutions to the Yang-Baxter equation and p-nilpotency of skew braces*. Internat. J. Algebra Comput. 30.1 (2020), s. 91–115. DOI: 10.1142/S0218196719500656.

[O5] R. Lutowski, J. Popko i A. Szczepański. *Spin^c structures on Hantzsche-Wendt manifolds*. J. Geom. Phys. 171 (2022), Paper No. 104394, 17. DOI: 10.1016/j.geomphys.2021.104394.

Spin struktury na prawie płaskich rozmaitościach. Praca [O2].

Praca **[O2]** podejmuje problematykę klasyfikacji spin struktur na niskowymiarowych rozmaitościach prawie płaskich. Rodzina rozmaitości prawie płaskich to w istocie uogólnienie płaskich rozmaitości na przypadek, w którym $\mathbb{R}^n$ zastępujemy spójną, jednospójną nilpotentną grupą Liego N (patrz [Gro78], [Ruh82]). Mamy wtedy do czynienia z grupami *prawie Bieberbacha*, a więc beztorsyjnymi i dyskretnymi podgrupami $C \ltimes N$, dla których przestrzeń orbit – *infranilrozmaitość* $X = N/\Gamma$ – jest zwarta. Przez C oznaczamy maksymalną zwartą podgrupę grupy $\mathrm{Aut}(N)$ automorfizmów Liego N. Twierdzenia Bieberbacha da się, przynajmniej do pewnego stopnia, uogólnić na tę rodzinę grup (zobacz [Dek96, Rozdziały 2.2, 2.3]). W szczególności Γ wpisuje się w ciąg dokładny

$$1 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1, \tag{10}$$

gdzie Λ to maksymalna normalna nilpotentna podgrupa Γ, skończona grupa G to z kolei grupa holonomii rozmaitości X. Niech $n = \dim X$. Modyfikując dolny ciąg centralny grupy Λ możemy zbudować całkowitoliczbową reprezentację $G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, równoważną reprezentacji holonomii X. Klasyfikacja spin struktur, czy w ogólności ich istnienie, zadane są analogami warunków dla płaskich rozmaitości. Istotna jest więc przemienność odpowiednika diagramu (9) i 2-podgrupy Sylowa grupy G.

Cel pracy to znalezienie prawie płaskich spin 4-rozmaitości. Co prawda mamy do zbadania nieskończenie wiele rozmaitości, ale klasyfikacja zaprezentowana w [Dek96] nasuwa pewien pomysł. Załóżmy, że grupę prawie Bieberbacha Γ, wymiaru 4, zadaje ciąg (10). Przypuśćmy, że S jest zbiorem generatorów Λ. Niech Λ^2 oznacza domknięcie normalne podgrupy Λ, generowanej przez kwadraty jej generatorów:

$$\Lambda^2 := \langle\langle s^2 \mid s \in S \rangle\rangle.$$

Wspomniany wcześniej odpowiednik diagramu (9) i związaną z nim klasyfikację spin struktur możemy zmodyfikować w taki sposób, aby zamiast Γ użyć grupy Γ/Λ^2. Dzięki takiemu podejściu zyskujemy możliwość klasyfikacji spin infranilrozmaitości wymiaru 4, bowiem grup postaci Γ/Λ^2 jest skończenie wiele.

Użycie w głównej mierze narzędzi z pracy [H4] pozwala na znalezienie przeciwobrazów grup holonomii prawie płaskich 4-rozmaitości względem odwzorowania nakrywającego $\lambda\colon \mathrm{Spin}(4) \to \mathrm{SO}(4)$, a to prowadzi ostatecznie do klasyfikacji spin struktur na tych rozmaitościach. Dodajmy, że w tym przypadku dostajemy również informacje o ich paralelizowalności.

Grupy strukturalne multipermutacyjnych rozwiązań równania Yanga-Baxtera. Praca [O4].

Teoriozbiorowym rozwiązaniem równania Yanga-Baxtera nazywamy parę (X, R), gdzie X jest zbiorem, a $r\colon X \times X \to X \times X$ to taka bijekcja, że

$$(r \times id)(id \times r)(r \times id) = (id \times r)(r \times id)(id \times r).$$

Przyjmując notację $r(x, y) = (\sigma_x(y), \tau_y(x))$, rozwiązanie nazywamy *niezdegenerowanym*, gdy σ_x jest permutacją dla każdego $x \in X$. *Inwolutywność* rozwiązania oznacza, że $r^2 = id$. Na (X, r) istnieje pewna relacja równoważności i przy jej pomocy jesteśmy w stanie wygenerować ciąg rozwiązań. Jeżeli pewien element tego ciągu wyznacza zbiór jednoelementowy, to (X, r) nazywamy *multipermutacyjnym*.

Gateva-Ivanowa i Van den Bergh w artykule [GV98] wykazali, że grupa strukturalna

$$G(X, r) := \langle X \mid xy = uv, \text{ o ile } r(x, y) = (u, v) \rangle$$

niezdegenerowanego, inwolutywnego rozwiązania (X, r) jest grupą Bieberbacha. W późniejszym czasie badacze wykazali, że struktura tejże grupy wyznacza pewne własności samego rozwiązania. Np. multipermutacyjność (X, r) jest równoważna rozproszoności $G(X, r)$. Chociażby z tego punktu widzenia można zapytać również o własność unikalnego produktu dla grupy $G(X, r)$. Jak pisałem przy okazji omawiania pracy [H5], grupa Promysłowa jest tutaj bardzo ważnym przykładem. Z tej perspektywy ważnym aspektem artykułu jest prezentacja algorytmu, który pozwala sprawdzić, czy dana grupa Bieberbacha zawiera grupę Δ_P.

W badaniu nieinwolutywnych rozwiązań ważną rolę odgrywają struktury algebraiczne nazwane skośnymi lewymi klamrami. Struktury te są postaci $(B, +, \circ)$, gdzie $(B, +), (B, \circ)$ to grupy i zachodzi prawo

$$\forall_{a,b,c \in B}\ a \circ (b + c) = a \circ b - a + a \circ c.$$

Wiadomo, że każde niezdegenerowane rozwiązanie (X, r) wyznacza skośną lewą klamrę $(B, +, \circ)$ i na odwrót. Zagadnienie multipermutacyjności nieinwolutywnego rozwiązania (X, r) związane jest z tzw. prawą nilpotentnością B. W artykule rozważane są z kolei powiązania tej własności z pewnymi lokalnymi własnościami B jako klamry oraz grupy $(B, \circ)$. Idąc dalej, lewa nilpotentność B badana jest za pomocą jej lokalnych własności.

Płaskie rozmaitości typu diagonalnego. Prace [O1], [O3], [O5].

Mówimy, że płaska n-wymiarowa rozmaitość X jest *typu diagonalnego*, jeżeli istnieje normalna podgrupa abelowa L' jej grupy podstawowej Γ, danej ciągiem (1), o następujących własnościach:

a) $G' := \Gamma/L'$ jest elementarną 2-grupą abelową;

b) istnieje baza $l_1, \dots, l_n$ $\mathbb{Z}$-modułu L' taka, że

$$g \cdot l_i = \pm l_i$$

dla $g \in G', 1 \leqslant i \leqslant n$.

W przypadku, gdy $L' = L$, mówimy, że X jest rozmaitością lub, że Γ jest grupą *diagonalną*. Na potrzeby poniższego opisu załóżmy, że $G' = \Gamma/L' = C_2^d$ oraz $\rho\colon \Gamma \to G'$ jest homomorfizmem naturalnym.

Można zaryzykować stwierdzenie, że sztandarowym przykładem diagonalnych grup Bieberbacha są uogólnione grupy Hantzsche-Wendta, które w przypadku orientowalnym nazywamy po prostu grupami Hantzsche-Wendta (*HW-grupami*). Są one zdefiniowane jako te grupy Bieberbacha, których grupa holonomii jest elementarną 2-grupa abelową maksymalnej rangi. Ich diagonalność wykazali Rosetti i Szczepański w [RS05]. Problem 10 pracy [Szc06] porusza w swej istocie zagadnienie relacji w uogólnionych grupach Hantzsche-Wendta danego wymiaru. W [Szc01] autor pokazał, że w każdym nieparzystym wymiarze n istnieje HW-grupa, która jest epimorficznym obrazem grupy Fibonacciego $F(n-1, 2n)$. W artykule **[O1]** wynik ten udało się uogólnić na wszystkie HW-grupy. Możemy więc powiedzieć, że w pewnym sensie, wszystkie grupy Hantzsche-Wendta są cykliczne:

Twierdzenie 8 ([O1, Twierdzenie]). *Każda n-wymiarowa grupa Hantzsche-Wendta jest epimorficznym obrazem grupy Fibonacciego $F(n-1, 2n)$.*

Prace [O3], [O5] u swojej podstawy mają opis pierścieni kohomologii HW-grup, o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}_2$, zaprezentowany w [PS16]. Okazuje się, że opis ten można – do pewnego stopnia – rozszerzyć na płaskie rozmaitości typu diagonalnego. Dokładniej, zgodnie z oznaczeniami powyżej, mamy

$$X = \mathbb{R}^n/\Gamma = (\mathbb{R}^n/L')/(\Gamma/L') = \left(\prod_{i=1}^{n} \operatorname{span}\{l_i\}/\langle l_i \rangle\right)/G' = (S^1)^n/G' = T^n/G'$$

i w ten sposób grupa G' działa na torus T^n jako podgrupa grupy $\mathcal{D}^n$, gdzie

$$\mathcal{D} = \{z \mapsto z, z \mapsto -z, z \mapsto \bar{z}, z \mapsto -\bar{z}\} \cong C_2 \times C_2$$

to podgrupa grupy symetrii okręgu jednostkowego płaszczyzny zespolonej. Mając dany taki opis, dowolny wybór d generatorów grupy G' pozwala nam skonstruować macierz A stopnia $d \times n$ o współczynnikach w $\mathcal{D}$. Przy jej pomocy, w sposób kombinatoryczny, jesteśmy w stanie zdefiniować wielomiany

- stopnia 1: $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ oraz

- stopnia 2: $\theta_1, \dots, \theta_n$,

należące do pierścienia $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_d]$. Mają one następujące własności:

1. Obrazem wielomianu
$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i + \beta_i) \tag{11}$$
względem homomorfizmu indukowanego $\rho^* \colon H^*(G', \mathbb{F}_2) \to H^*(\Gamma, \mathbb{F}_2) = H^*(X, \mathbb{F}_2)$ jest totalna klasa Stiefela-Whitneya rozmaitości X.
2. Jeżeli $\rho^*_{(i)} \colon H^i(G', \mathbb{F}_2) \to H^i(\Gamma, \mathbb{F}_2)$ jest odwzorowaniem indukowanym przez ρ, to
$$\operatorname{Ker} \rho^*_{(1)} = 0 \text{ oraz } \operatorname{Ker} \rho^*_{(2)} = \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle.$$

Możemy więc opisać pierwszą i drugą klasę Stiefela-Whitneya rozmaitości X jako elementy algebry ilorazowej $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_d]/I$, gdzie I to ideał generowany przez $\operatorname{Ker} \rho^*_{(2)}$.

Używając powyższego języka, praca **[O3]** podaje przykład takiej płaskiej rozmaitości $X = \mathbb{R}^n/\Gamma$ typu diagonalnego, która nie jest spin, a której każde skończone i właściwe nakrycie ma spin strukturę. Przez *właściwe* rozumiemy tu takie nakrycie rozmaitości X, którego grupa holonomii jest właściwą podgrupą G. Przykład ten stanowi kontrast do przypadku rzeczywistych rozmaitości Botta, dla których istnienie spin struktur jest implikowane ich istnieniem na skończonych nakryciach z grupą holonomii C_2^2 (patrz [Gąs17, Twierdzenie 1.2]).

W pracy **[O5]** pokazujemy, że HW-rozmaitość wymiaru większego niż 3 nie posiada spin^c struktury. Zagadnienie istnienia spin^c struktur jest naturalne w przypadku tych rozmaitości, które nie są spin, a do nich zaliczają cię HW-rozmaitości wymiaru równego co najmniej 5 (patrz [MP06, Przykład 4.6]). Znajomość wybranych grup homologii i kohomologii HW-rozmaitości pozwala na postawienie kryterium istnienia spin^c struktur na tych rozmaitościach z wykorzystaniem wielomianu (11) oraz generatorów $\operatorname{Ker} \rho^*_{(2)}$. W konsekwencji przenosimy nasze rozważania na badanie własności macierzy A, która definiuje HW-rozmaitość jak wyżej. Ostatecznie, warunek istnienia spin^c struktury dany jest w sposób czysto kombinatoryczny. Pokazując, że w wymiarach większych bądź równych 5 warunek ten nie zachodzi, dostajemy główny wynik pracy.

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

09.2016 tygodniowa wizyta naukowa w Uniwersytecie w Southampton w ramach pracy nad artykułem [O2]
12.2018 kilkudniowa wizyta w RWTH w Akwizgranie w ramach pracy nad artykułem [H7]
07.2019 dwutygodniowa wizyta w RWTH w Akwizgranie i rozpoczęcie badań nad hipotezą, która częściowo została udowodniona w [H3]
07.2023 tygodniowa wizyta w UMCS w Lublinie w ramach pracy nad artykułem [GL23] (w recenzji)
09.2023 tygodniowa wizyta w Uniwersytecie w Kilonii w ramach pracy nad artykułem [LSW24] (w recenzji)

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

Działalność dydaktyczna obejmuje:

- wypromowanie 13 magistrantów;
- wieloletnie prowadzenie przedmiotów na Uniwersytecie Gdańskim, w szczególności: Algebra liniowa, Algebra, Analiza matematyczna, Teoria Galois, Teoria reprezentacji, Obliczeniowa teoria grup, Bazy danych; do większości prowadzonych przeze mnie wykładów przygotowałem prezentacje lub skrypty, które były udostępniane studentom;
- kurs *Modularnej teorii reprezentacji* dla uczestników Szkoły przygotowawczej do XXI Wykładu im. Andrzeja Jankowskiego;
- kurs wprowadzający do pracy z pakietem GAP, dla pracowników Instytutu Matematyki UG (skrypt z tego kursu znajduje się na stronie `www.gap-system.org/doc/learn`).

W ramach **działalności organizacyjnej** podjąłem następujące obowiązki:

- członkostwo w Radzie Dyscypliny Matematyka na Uniwersytecie Gdańskim, kadencja 2024-2028;
- członkostwo w Radzie Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego, kadencja 2024-2028;
- praca w zespole tworzącym kierunek *Modelowanie matematyczne i analiza danych*, na studiach pierwszego i drugiego stopnia, na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki UG;
- współpraca z pracownikami UG nad tworzeniem i zarządzaniem treściami strony www Instytutu Matematyki UG;
- udział w pracach przy organizacji serii *Wykładów im. Andrzeja Jankowskiego* (`mat.ug.edu.pl/ajml`) oraz *Kolokwiów Killinga-Weierstrassa* (`mat.ug.edu.pl/kwwk`), w tym tworzenie stron internetowych i ksiąg abstraktów; za organizację XX Wykładu im. Andrzeja Jankowskiego otrzymałem w 2019 roku Nagrodę Rektora Uniwersytetu Gdańskiego.

Działalność popularyzacyjną prowadziłem dla odbiorców na różnych poziomach ich edukacji czy kariery. Prowadziłem warsztaty:

- dla uczniów szkół podstawowych i średnich z zakresu topologii, geometrii, kryptografii, na przykład:
  2019 *Tajne przez poufne, czyli co Cezar wiedział o szyfrowaniu*,
  2020 *Powierzchnie, czyli co można, a czego nie można zrobić z gumy, drutu i papieru*,
  2021 *Grupy tapetowe, czyli matematycy dekorują ściany*;
- dla nauczycieli:
  2019 kurs LaTeX, wraz z jego zastosowaniem w nauczaniu (przygotowanie prezentacji, sprawdzianów, jego możliwości w różnych dziedzinach nauki).

W wielu wydarzeniach, oprócz przygotowania zajęć, brałem również udział w ich organizacji. Można wśród nich wymienić Rok Matematyki na Pomorzu (Noc Matematyki, XVII Wykład im. Andrzeja Jankowskiego, Matematyka jako ważny składnik kultury i cywilizacji).

7. Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej.

7.1. Nagrody

Na polu pracy naukowej i organizacyjnej otrzymałem następujące wyróżnienia:

2019 Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za serię dwóch artykułów poświęconym związkom pomiędzy teorią reprezentacji grup skończonych a grupami krystalograficznymi i ich geometrią oraz za wzorową organizację jubileuszowego XX wykładu im. A. Jankowskiego wraz z towarzyszącą mu minikonferencją (nagroda zespołowa drugiego stopnia);

2022 Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za osiągnięcia naukowe udokumentowane publikacjami naukowymi (nagroda indywidualna czwartego stopnia).

7.2. Wystąpienia na seminariach

Oprócz regularnych odczytów na seminarium Zakładu Geometrii Instytutu Matematyki UG, w ramach seminariów innych jednostek miałem następujące wystąpienia:

20.05.2014 Uniwersytet Warszawski (Seminarium z Topologii algebraicznej): *Nieprzywiedlne reprezentacje euklidesowe grup Fibonacciego*.

22.01.2019 Uniwersytet Warszawski (Seminarium z Topologii algebraicznej): *Spin struktury płaskich rozmaitości typu diagonalnego*,

12.01.2021 Politechnika Warszawska (Seminarium z Algebry ogólnej): *Grupy strukturalne multipermutacyjnych rozwiązań równania Yanga-Baxtera*,

10.11.2021 Uniwersytet Warszawski (Seminarium z Topologii algebraicznej): *Płaskie rozmaitości z jednorodną reprezentacją holonomii*,

23.05.2023 Politechnika Warszawska (Seminarium z Algebry ogólnej): *Nierozwiązalne grupy Bieberbacha*,

28.09.2023 Uniwersytet w Kilonii (Mathematisches Seminar): *Complex Vasquez invariant*,

22.11.2023 Uniwersytet Warszawski (Seminarium z Topologii algebraicznej): *Zespolony niezmiennik Vasqueza*,

23.11.2023 Uniwersytet w Bayreuth (seminarium online): *Complex Vasquez invariant*,

Bibliografia

[AK57] L. Auslander i M. Kuranishi. *On the holonomy group of locally Euclidean spaces*. Ann. of Math. (2) 65 (1957), s. 411–415. DOI: 10.2307/1970053.

[BCV18] D. Bachiller, F. Cedó i L. Vendramin. *A characterization of finite multipermutation solutions of the Yang-Baxter equation*. Publ. Mat. 62.2 (2018), s. 641–649. DOI: 10.5565/PUBLMAT6221809.

[BR11] O. Baues i J. Riesterer. *Virtually abelian Kähler and projective groups*. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 81.2 (2011), s. 191–213. DOI: 10.1007/s12188-011-0056-1.

[Bel] I. Belegradek. *Is there a flat manifold with trivial first homology?* MathOverflow. Available at: https://mathoverflow.net/q/434822 (version: 2022-11-17).

[BL05] M. Belolipetsky i A. Lubotzky. *Finite groups and hyperbolic manifolds*. Invent. Math. 162.3 (2005), s. 459–472. DOI: 10.1007/s00222-005-0446-z.

[Bet+22] R. G. Bettiol, A. Derdzinski, R. Mossa i P. Piccione. *Subspace foliations and collapse of closed flat manifolds*. Math. Nachr. 295.12 (2022), s. 2338–2356. DOI: 10.1002/mana.202000156.

[BDP18] R. G. Bettiol, A. Derdzinski i P. Piccione. *Teichmüller theory and collapse of flat manifolds*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 197.4 (2018), s. 1247–1268. DOI: 10.1007/s10231-017-0723-7.

[Bie11] L. Bieberbach. *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume*. Math. Ann. 70.3 (1911), s. 297–336. DOI: 10.1007/BF01564500.

[Bie12] L. Bieberbach. *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung.) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich*. Math. Ann. 72.3 (1912), s. 400–412. DOI: 10.1007/BF01456724.

[Bow00] B. H. Bowditch. *A variation on the unique product property*. J. London Math. Soc. (2) 62.3 (2000), s. 813–826. DOI: 10.1112/S0024610700001307.

[Bro99] R. F. Brown. *Fixed point theory*. *History of topology*. North-Holland, Amsterdam, 1999, s. 271–299. DOI: 10.1016/B978-044482375-5/50011-0.

[Cal57] E. Calabi. *Closed, locally euclidean, 4-dimensional manifolds*. *The Annual meeting in Rochester*. Red. R. D. Schafer. T. 63. 2. Amer. Math. Soc., 1957, s. 135. DOI: 10.1090/S0002-9904-1957-10102-5.

[CC17] F. Catanese i P. Corvaja. *Teichmüller spaces of generalized hyperelliptic manifolds*. *Complex and symplectic geometry*. T. 21. Springer INdAM Ser. Springer, Cham, 2017, s. 39–49.

[Cha86] L. S. Charlap. *Bieberbach groups and flat manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1986, s. xiv+242. DOI: 10.1007/978-1-4613-8687-2.

[CMO17] S. Choi, M. Masuda i S. Oum. *Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs*. Trans. Amer. Math. Soc. 369.4 (2017), s. 2987–3011. DOI: 10.1090/tran/6896.

[CS01] C. Cid i T. Schulz. *Computation of five- and six-dimensional Bieberbach groups*. Exp. Math. 10.1 (2001), s. 109–115. DOI: 10.1080/10586458.2001.10504433.

[CW89] G. Cliff i A. Weiss. *Torsion free space groups and permutation lattices for finite groups. Representation theory, group rings, and coding theory*. T. 93. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, s. 123–132. DOI: 10.1090/conm/093/1003347.

[CMR10] S. Console, R. J. Miatello i J. P. Rossetti. *$\mathbb{Z}_2$-cohomology and spectral properties of flat manifolds of diagonal type*. J. Geom. Phys. 60.5 (2010), s. 760–781. DOI: 10.1016/j.geomphys.2010.01.006.

[CBG08] J. H. Conway, H. Burgiel i C. Goodman-Strauss. *The symmetries of things*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008, s. xviii+426.

[Dad65] E. C. Dade. *The maximal finite groups of 4×4 integral matrices*. Illinois J. Math. 9 (1965), s. 99–122. DOI: 10.1215/ijm/1256067584.

[Dek96] K. Dekimpe. *Almost-Bieberbach groups: affine and polynomial structures*. T. 1639. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1996, s. x+259. DOI: 10.1007/BFb0094472.

[DDP09] K. Dekimpe, B. De Rock i P. Penninckx. *The R_∞ property for infra-nilmanifolds*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 34.2 (2009), s. 353–373.

[DHS09] K. Dekimpe, M. Hałenda i A. Szczepański. *Kähler flat manifolds*. J. Math. Soc. Japan 61.2 (2009), s. 363–377. DOI: 10.2969/jmsj/06120363.

[DSS06] K. Dekimpe, M. Sadowski i A. Szczepański. *Spin structures on flat manifolds*. Monatsh. Math. 148.4 (2006), s. 283–296. DOI: 10.1007/s00605-005-0367-3.

[DKT19] K. Dekimpe, T. Kaiser i S. Tertooy. *The Reidemeister spectra of low dimensional crystallographic groups*. J. Algebra 533 (2019), s. 353–375. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2019.04.038.

[DG23] A. Demleitner i C. Gleissner. *The classification of rigid hyperelliptic fourfolds*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 202.3 (2023), s. 1425–1450. DOI: 10.1007/s10231-022-01287-7.

[DP19] A. Derdzinski i P. Piccione. *Flat manifolds and reducibility*. 2019. arXiv: 1903.10479 [math.DG].

[EM79] B. Eckmann i G. Mislin. *Rational representations of finite groups and their Euler class*. Math. Ann. 245.1 (1979), s. 45–54. DOI: 10.1007/BF01420429.

[Fuk06] K. Fukaya. *Metric Riemannian geometry. Handbook of differential geometry*. T. 2. North-Holland, Amsterdam, 2006, s. 189–313. DOI: 10.1016/S1874-5741(06)80007-5.

[20] *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.1*. https://www.gap-system.org. The GAP Group, 20.

[Gar21a] G. Gardam. *A counterexample to the unit conjecture for group rings*. Ann. of Math. (2) 194.3 (2021), s. 967–979. DOI: 10.4007/annals.2021.194.3.9.

[Gar21b] G. Gardam. *A counterexample to the unit conjecture for group rings*. Ann. of Math. 194.3 (2021), s. 967–979. DOI: 10.4007/annals.2021.194.3.9.

[Gar23] G. Gardam. *Non-trivial units of complex group rings*. 2023. arXiv: 2312.05240 [math.GR].

[GV98] T. Gateva-Ivanova i M. Van den Bergh. *Semigroups of I-type*. J. Algebra 206.1 (1998), s. 97–112. DOI: 10.1006/jabr.1997.7399.

[GS13] A. Gąsior i A. Szczepański. *Tangent bundles of Hantzsche-Wendt manifolds*. J. Geom. Phys. 70 (2013), s. 123–129. DOI: 10.1016/j.geomphys.2013.03.013.

[GS14] A. Gąsior i A. Szczepański. *Flat manifolds with holonomy group $\mathbb{Z}_2^k$ of diagonal type*. Osaka J. Math. 51.4 (2014), s. 1015–1025.

[Gąs17] A. Gąsior. *Spin-structures on real Bott manifolds*. J. Korean Math. Soc. 54.2 (2017), s. 507–516. DOI: 10.4134/JKMS.j160084.

[GL23] A. Gąsior i R. Lutowski. *Complex Vasquez invariant*. 2023. arXiv: 2309.13740 [math.AT].

[GL24] A. Gąsior i R. Lutowski. *Spin^c structures on real Bott manifolds*. 2024. arXiv: 2407.01166 [math.DG].

[Gro78] M. Gromov. *Almost flat manifolds*. J. Differential Geom. 13.2 (1978), s. 231–241. DOI: 10.4310/jdg/1214434488.

[HW35] W. Hantzsche i H. Wendt. *Dreidimensionale euklidische Raumformen*. Math. Ann. 110.1 (1935), s. 593–611. DOI: 10.1007/BF01448045.

[Hil02] D. Hilbert. *Mathematical problems*. Bull. Amer. Math. Soc. 8.10 (1902), s. 437–479. DOI: 10.1090/S0002-9904-1902-00923-3.

[Hil+87] H. Hiller, Z. Marciniak, C.-H. Sah i A. Szczepański. *Holonomy of flat manifolds with $b_1 = 0$. II*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 38.150 (1987), s. 213–220. DOI: 10.1093/qmath/38.2.213.

[HS86] H. Hiller i C.-H. Sah. *Holonomy of flat manifolds with $b_1 = 0$*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 37.146 (1986), s. 177–187. DOI: 10.1093/qmath/37.2.177.

[HS91] G. Hiss i A. Szczepański. *On torsion free crystallographic groups*. J. Pure Appl. Algebra 74.1 (1991), s. 39–56. DOI: 10.1016/0022-4049(91)90047-6.

[HS97] G. Hiss i A. Szczepański. *Flat manifolds with only finitely many affinities*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 45.4 (1997), s. 349–357.

[HS08] G. Hiss i A. Szczepański. *Spin structures on flat manifolds with cyclic holonomy*. Comm. Algebra 36.1 (2008), s. 11–22. DOI: 10.1080/00927870701649200.

[HS95] G. Hiss i A. Szczepański. *Holonomy groups of Bieberbach groups with finite outer automorphism groups*. Arch. Math. (Basel) 65.1 (1995), s. 8–14. DOI: 10.1007/BF01196572.

[HP89] D. F. Holt i W. Plesken. *Perfect groups*. Oxford Mathematical Monographs. With an appendix by W. Hanrath, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1989, s. xii+364.

[Hul22] A. Hulpke. *The perfect groups of order up to two million*. Math. Comp. 91.334 (2022), s. 1007–1017. DOI: 10.1090/mcom/3684.

[Jia81] B. J. Jiang. *Fixed point classes from a differential viewpoint. Fixed point theory (Sherbrooke, Que., 1980)*. T. 886. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1981, s. 163–170.

[Jia83] B. J. Jiang. *Lectures on Nielsen fixed point theory*. T. 14. Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1983, s. vii+110.

[Joh97] D. L. Johnson. *Presentations of groups*. Second. T. 15. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, s. xii+216. DOI: 10.1017/CBO9781139168410.

[Joh90] F. E. A. Johnson. *Flat algebraic manifolds. Geometry of low-dimensional manifolds, 1 (Durham, 1989)*. T. 150. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, s. 73–91. DOI: 10.1017/CBO9780511629334.007.

[KM09] Y. Kamishima i M. Masuda. *Cohomological rigidity of real Bott manifolds*. Algebr. Geom. Topol. 9.4 (2009), s. 2479–2502. DOI: 10.2140/agt.2009.9.2479.

[KR16] S. Kionke i J. Raimbault. *On geometric aspects of diffuse groups*. Doc. Math. 21 (2016). With an appendix by Nathan Dunfield, s. 873–915. DOI: 10.4171/dm/548.

[LV19] V. Lebed i L. Vendramin. *On structure groups of set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation*. Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 62.3 (2019), s. 683–717. DOI: 10.1017/s0013091518000548.

[Lüc10] W. Lück. *Survey on aspherical manifolds. European Congress of Mathematics*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2010, s. 53–82. DOI: 10.4171/077-1/4.

[Lut21] R. Lutowski. *Library of low dimensional Bieberbach groups*. 2021. URL: https://mat.ug.edu.pl/~rlutowsk/bieblib.

[LSW24] R. Lutowski, A. Szczepański i R. Weidmann. *Automorphism groups of combinatorial Hantzsche-Wendt groups*. 2024. arXiv: 2401.05141 [math.GR].

[MP06] R. J. Miatello i R. A. Podestá. *The spectrum of twisted Dirac operators on compact flat manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 358.10 (2006), s. 4569–4603. DOI: 10.1090/S0002-9947-06-03873-6.

[MR99] R. J. Miatello i J. P. Rossetti. *Isospectral Hantzsche-Wendt manifolds*. J. Reine Angew. Math. 515 (1999), s. 1–23. DOI: 10.1515/crll.1999.077.

[ODC] Online Dictionary of Crystallography. *Main Page*. [Online; 1 July 2024]. URL: https://dictionary.iucr.org/Main_Page.

[OPS08] J. Opgenorth, W. Plesken i T. Schulz. *Carat, Crystallographic AlgoRithms And Tables, Version 2.1b1*. https://github.com/lbfm-rwth/carat/. 2008.

[Pfä00] F. Pfäffle. *The Dirac spectrum of Bieberbach manifolds*. J. Geom. Phys. 35.4 (2000), s. 367–385. DOI: 10.1016/S0393-0440(00)00005-X.

[Ple89] W. Plesken. *Minimal dimensions for flat manifolds with prescribed holonomy*. Math. Ann. 284.3 (1989), s. 477–486. DOI: 10.1007/BF01442498.

[PP77a] W. Plesken i M. Pohst. *On maximal finite irreducible subgroups of* $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$. *I. The five and seven dimensional cases*. Math. Comp. 31.138 (1977), s. 536–551. DOI: 10.2307/2006436.

[PP77b] W. Plesken i M. Pohst. *On maximal finite irreducible subgroups of* $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$. *II. The six dimensional case*. Math. Comp. 31.138 (1977), s. 552–573. DOI: 10.2307/2006437.

[PP80a] W. Plesken i M. Pohst. *On maximal finite irreducible subgroups of* $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$. *III. The nine-dimensional case*. Math. Comp. 34.149 (1980), s. 245–258. DOI: 10.2307/2006233.

[PP80b] W. Plesken i M. Pohst. *On maximal finite irreducible subgroups of* $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$. *IV. Remarks on even dimensions with applications to* $n = 8$. Math. Comp. 34.149 (1980), s. 259–275. DOI: 10.2307/2006234.

[PP80c] W. Plesken i M. Pohst. *On maximal finite irreducible subgroups of* $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$. *V. The eight-dimensional case and a complete description of dimensions less than ten*. Math. Comp. 34.149 (1980), 277–301, loose microfiche suppl. DOI: 10.2307/2006235.

[PS16] J. Popko i A. Szczepański. *Cohomological rigidity of oriented Hantzsche–Wendt manifolds*. Adv. Math. 302 (2016), s. 1044–1068. DOI: 10.1016/j.aim.2016.08.004.

[Pro88] S. D. Promislow. *A simple example of a torsion-free, nonunique product group*. Bull. London Math. Soc. 20.4 (1988), s. 302–304. DOI: 10.1112/blms/20.4.302.

[Put07] B. Putrycz. *Commutator subgroups of Hantzsche-Wendt groups*. J. Group Theory 10.3 (2007), s. 401–409. DOI: 10.1515/JGT.2007.031.

[PS10] B. Putrycz i A. Szczepański. *Existence of spin structures on flat four-manifolds*. Adv. Geom. 10.2 (2010), s. 323–332. DOI: 10.1515/ADVGEOM.2010.013.

[RG22] M. Roeder i T. GAP Team. *HAPcryst, A HAP extension for crystallographic groups, Version 0.1.15*. https://gap-packages.github.io/hapcryst/. GAP package. 2022.

[RS05] J. P. Rossetti i A. Szczepański. *Generalized Hantzsche-Wendt flat manifolds*. Rev. Mat. Iberoamericana 21.3 (2005), s. 1053–1070. DOI: 10.4171/RMI/445.

[Ruh82] E. A. Ruh. *Almost flat manifolds*. J. Differential Geom. 17.1 (1982), s. 1–14. DOI: 10.4310/jdg/1214436698.

[Rum24] W. Rump. *Cofinite integral braces and flat manifolds*. J. Algebra 649 (2024), s. 273–301. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2024.03.016.

[Ser77] J.-P. Serre. *Linear representations of finite groups*. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, s. x+170. DOI: 10.1007/978-1-4684-9458-7.

[Sou94] B. Souvignier. *Irreducible finite integral matrix groups of degree* 8 *and* 10. Math. Comp. 63.207 (1994). With microfiche supplement, s. 335–350. DOI: 10.2307/2153579.

[Szc83] A. Szczepański. *Aspherical manifolds with the* $\mathbb{Q}$*-homology of a sphere*. Mathematika 30.2 (1983), 291–294 (1984). DOI: 10.1112/S0025579300010561.

[Szc96] A. Szczepański. *Outer automorphism groups of Bieberbach groups*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 3.5 (1996), s. 585–593. DOI: 10.36045/bbms/1105652786.

[Szc01] A. Szczepański. *The Euclidean representations of the Fibonacci groups*. Q. J. Math. 52.3 (2001), s. 385–389. DOI: 10.1093/qjmath/52.3.385.

[Szc06] A. Szczepański. *Problems on Bieberbach groups and flat manifolds*. Geom. Dedicata 120 (2006), s. 111–118. DOI: 10.1007/s10711-006-9056-1.

[Szc12] A. Szczepański. *Geometry of crystallographic groups*. T. 4. Algebra and Discrete Mathematics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012, s. xii+195. DOI: 10.1142/8519.

[Szc97] A. Szczepański. *Decomposition of flat manifolds*. Mathematika 44.1 (1997), s. 113–119. DOI: 10.1112/S0025579300012018.

[Tho85] S. Thomas. *The automorphism tower problem*. Proc. Amer. Math. Soc. 95.2 (1985), s. 166–168. DOI: 10.2307/2044505.

[Vas70] A. T. Vasquez. *Flat Riemannian manifolds*. J. Differential Geom. 4 (1970), s. 367–382. DOI: 10.4310/jdg/1214429510.

[Wal03] R. Waldmüller. *A flat manifold with no symmetries*. Exp. Math. 12.1 (2003), s. 71–77. DOI: 10.1080/10586458.2003.10504712.

[Wey89] H. Weyl. *Symmetry*. Princeton Science Library. Reprint of the 1952 original. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989, s. viii+168.

[Wol11] J. A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. Sixth. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011, xviii+424. DOI: 10.1090/chel/372.

[Zas48] H. Zassenhaus. *Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen*. Comment. Math. Helv. 21 (1948), s. 117–141. DOI: 10.1007/BF02568029.

[Zim90] B. Zimmermann. *On the Hantzsche-Wendt manifold*. Monatsh. Math. 110.3-4 (1990), s. 321–327. DOI: 10.1007/BF01301685.

PODPIS ZAUFANY
RAFAŁ
LUTOWSKI
10.01.2025 12:53:54 [GMT+1]
Dokument podpisany elektronicznie podpisem zaufanym

Rafał Lutowski
.....
(podpis wnioskodawcy)