Singapur, 8-my grudnia, 2024r.

prof. dr hab. inż. Piotr Faliszewski
Wydział Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
faliszew@agh.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Bartłomieja Pawelskiego

Zgodnie z zaproszeniem Przewodniczącego Rady Dyscypliny Matematyka Uniwersytetu Gdańskiego, dr. hab. Błażeja Szepietowskiego, przedstawiam poniżej moją recenzję rozprawy doktorskiej Bartłomieja Pawelskiego pod tytułem "Counting and generating monotone Boolean functions". Praca została przygotowana pod kierunkiem prof. Andrzeja Szepietowskiego i mieści się w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Wstęp

Rozprawa dotyczy problemu zliczania monotonicznych funkcji Booleowskich oraz niektórych podklas tego rodzaju funkcji, w zależności od liczby zmiennych wejściowych. W szczególności autor podaje liczbę nieizomorficznych funkcji ośmiu oraz dziewięciu zmiennych. Na pracę składa się autoreferat podsumowujący wyniki oraz cztery artykuły—z czego trzy opublikowane w czasopismach oraz jeden przedstawiony w repozytorium arXiv:

1. B. Pawelski. On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 8 variables. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 25, 2022.

2. B. Pawelski, A. Szepietowski. Divisibility properties of Dedekind numbers. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 26, 2023.

3. B. Pawelski, On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 9 variables. *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 70, 2024.

4. B. Pawelski, A. Szepietowski. Counting self-dual monotone Boolean functions. arXiv preprint, 2024.

Zbiór prac oraz autoreferat jest jak najbardziej dopuszczalną formą rozprawy doktorskiej, ale zostawia pewien niedosyt. Z jednej strony problematyka zliczania monotonicznych funkcji Booleowskich ma ugruntowaną pozycję w informatyce teoretycznej oraz matematyce i zajmuje się nią kilka zespołów. Z drugiej, jako osoba która bezpośrednio nie pracuje w tej tematyce byłem rozczarowny faktem, że doktorant nie podjął próby wyjaśnienia wizji naukowej, jaka przyświeca tym badaniom. O ile można rozwijać ciekawe metody matematyczne oraz inżynierskie by obliczać ile jest funkcji danej liczby zmiennych, to chciałbym się także z takiego doktoratu dowiedzieć w jakim celu to robimy. Dlaczego warto jest znać ile jest konkretnie funkcji ośmiu zmiennych oraz dziewięciu zmiennych i czemu nie wystarczy nam znajomość wyników asymptotycznych? Oczywiście ciekawość matematyczna to wystarczająca motywacja dla badań podstawowych, ale jednak zostałem z poczuciem niedosytu i niewykorzystanej okazji.

Zawartość rozprawy i ocena

W pracy "On the Number of Inequivalent Monotone Boolean Functions of 8 Variables" doktorant oblicza ile jest nieizomorficznych monotonicznych funkcji ośmiu zmiennych (liczba ta oznaczana jest jako r_8). Pomysł zliczania takich funkcji pojawił się w połowie lat osiemdziesiątych, kiedy obliczono liczy do r_7. Kolejne wyniki w tej dziedzinie pojawiły się od 5 do 10 lat temu, kiedy potwierdzono obliczenia z lat osiemdziesiątych oraz podano dolne ograniczenie na r_8. W tym kontekście wynik doktoranta jest z pewnością znaczący. Od strony technicznej, doktorant uzyskał swój wynik korzystając z lematu Burnside'a, który—na ile mogę ocenić—w tej dziedzinie jest dość standardowy, ale trudność techniczna polegała na zliczaniu punktów stałych zbioru monotonicznych funkcji Booleowskich względem permutacji zmiennych wejściowych.

O ile prace doktoranta generalnie napisane są na wystarczająco dobrym poziomie—choć bardzo sucho i technicznie—to ta praca w kilku miejscach zaskoczyła mnie usterkami językowymi. W szczególności, drugie zdanie sekcji 3.1. brzmi:

> "Given a poset $P = (X, \leqslant)$, downset of P is such a subset $S \subseteq X$ that for each $x \in S$ all elements from $X \leqslant x \in S$."

Końcówka tego zdania jest w moim odczuciu zbyt skrótowa. O ile można się domyśleć co znaczy i zapewne nie jest to problemem dla osób pracujących w dziedzinie, to ta sama definicja w pracy "On The Number of Inequivalent Monotone Boolean Functions of 9 Variables" została już sformułowana dużo zgrabniej. Przy okazji należy zwrócić uwagę, że prace doktoranta zawierają szereg powtarzających się zwrotów we wstępach i preliminariach. Jest to dość irytujące gdy czyta się te prace jedna po drugiej, ale nie przekracza dopuszczalnych norm.

Kolejnym krokiem po obliczeniu r_8 jest obliczenie r_9 w pracy "On The Number of Inequivalent Monotone Boolean Functions of 9 Variables". Doktorant przedstawia metodologię z której skorzystał, ponownie opierając się na lemacie Burnside'a ale korzystając po drodze z szeregu nietrywialnych algorytmów i pomysłów.

W pracy "Divisibility Properties of Dedekind Numbers" doktorant zajmuje się kwestią podzielności dziewiątej liczby Dedekinda i wykazuje, że liczba ta przystaje do 6 modulo 210. Wynik ma znaczenie o tyle, że pozwala na częściową weryfikację poprawności obliczania tej liczby. Jest to nowatorskie bo wcześniej nie było tego typu sposobów na sprawdzenie czy obliczenia kolejnych liczb Dedekinda i pokrewnych są poprawne. Niedługo po udostępnieniu tej pracy na arXiv dwa inne zespoły obliczyły dziewiątą liczbę Dedekinda i faktycznie wynik uzyskany przez doktoranta potwierdził się i przyczynił do weryfikacji ich poprawności. Praca zawiera szereg sprytnych argumentów, które potwierdzają podzielność lub przystawianie dziewiątej liczby Dedekinda dla szeregou niewielkich podzielników, co po zastosowaniu chińskiego twierdzenia o resztach daje ostateczny wynik.

W pracy "Counting self-dual monotone Boolean functions" doktorant zajmuje się zliczaniem samodualnych funkcji Booleowskich—potwierdzając niektóre znane wyniki—oraz ich klas równoważności ze względu na permutacje zmiennych wejściowych—uzyskujące nowe wyniki. Jak w poprzednich pracach, podstawowym narzędziem jest lemat Burnside'a, poprzedzony szeregiem obserwacji, nowych pomysłów oraz algorytmów.

Jako osobie, która nie pracuje nad podobną tematyką trudno jest mi się odnieść bezpośrednio do nowatorskości pomysłów doktoranta—trudno mi ocenić na ile to rzeczywiście nowe podejścia, a na ile mądre wykorzystanie istniejących pomysłów, z dodatkiem odpowiedniej kombinatoryki. Nie ulega jednak wątpliwości, że szereg badaczy na świecie jest zainteresowanych podobną tematyką a doktorantowi udało się poprawić ich wyniki oraz zainteresować swoimi badaniami.

Podsumowanie

Przedstawione wyniki uzasadniają nadanie mgr. Bartłomiejowi Pawelskiemu stopnia doktora. Udowonił on, że potrafi rozwiązać zadany problem naukowy w ciekawy i nietrywialny sposób. Jego wyniki pokazują zarówno umiejętności matematyczne jak i inżynierską zdolność do zrealizowania zadania. Osoby zainteresowane mogą sprawdzić także parametry bibliometryczne prac, które przedstawił jako części swojego doktoratu, ale w przypadku badań dość niszowych nie ma to większego znaczenia. Liczy się wartość merytoryczna przedstawionych wyników, a ta jest wysoka.