Odwzorowania k-dodatnie w fizyce

Tomasz Patryk Młynik

Wydział Fizyki Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dr. hab. Marcina Marciniaka, prof. UG

Gdańsk 2024

Wszystkim tym, bez wsparcia których
ta praca nigdy by nie powstała.

Streszczenie

Celem niniejszej rozprawy jest systematyczna analiza dowolnych odwzorowań dodatnich, które pojawiają się w teorii informacji kwantowej. W szczególności pokażemy jak można scharakteryzować dowolne odwzorowanie ze względu na k-dodatniość używając pomocniczego parametru μ_k który to określa k-dodatniość rozważanego odwzorowania. Dyskutujemy tutaj problematykę struktury odwzorowań k-dodatnich na niskowymiarowych algebrach macierzowych.

Rozdział pierwszy stanowi krótki wstęp historyczny oraz przedstawia motywację do badania odwzorowań dodatnich w kwantowej teorii informacji.

Drugi rozdział rozprawy stanowi przypomnienie podstawowych definicji i faktów związanych z pojęciem wypukłości, przestrzeni Hilberta, obiektów żyjących na tych przestrzeniach, konceptem kwantowego splątania a także narzędzia potrzebne do opisu pomiarów i detekcji splątania w formalizmie mechaniki kwantowej.

Rozdział trzeci stanowi przypomnienie podstawowych własności dotyczących odwzorowań dodatnich, pewne ich klasy oraz reprezentacje a także znane konstrukcje. Dyskutujemy tutaj zagadnienia związane z charakteryzacją odwzorowań k-dodatnich oraz dodatkowych ich własności takich jak rozkładalność. Pokazujemy powszechnie stosowane metody do badania odwzorowań dodatnich oraz szczegółowo omawiamy pewne znane konstrukcję odwzorowań dodatnich a także ich ograniczenia. Ograniczenia te w szczególności stanowią motywację do przedstawienia nowej metody konstrukcji odwzorowań k-dodatnich które nie są $(k+1)$-dodatnie.

Rozdział czwarty prezentuje oryginalną koncepcję charakteryzacji dowolnego odwzorowania dodatniego wykorzystując reprezentację Choi-Krausa-Stinespringa, w szczególności przedstawia charakteryzację k-dodatniości przy pomocy pomocniczego parametru μ_k. Pokazujemy, że w szczególnym wypadku gdy wymiary pomiędzy którymi działa odwzorowanie różnią się o 1 to potrafimy analitycznie obliczyć parametr μ_k dla którego odwzorowanie jest k-dodatnie. Zastosowanie podanej charakteryzacji przedstawiamy na szeroko opisanym przykładzie zaproponowanego odwzorowania. W szczególności rozważamy modyfikacje i uogólnienia zaproponowanego odwzorowania takie aby uzyskać pewne własności takie jak nierozkładalność.

W rozdziale piątym aplikujemy naszą metodę charakteryzacji do odwzorowania eksponowanego Millera-Olkiewicza które jest eksponowane w stożku odwzorowań dodatnich i pokazujemy, że dokonując pewnej modyfikacji możemy otrzymać odwzorowanie dla którego 2-dodatniość implikuje całkowitą dodatniość co przekłada się na następującą interpretację geometryczną: przesuwając eksponowane odwzorowanie Millera-Olkiewicza w stronę odwzorowań całkowicie dodatnich poprzez dodatnie na $\lambda\,\mathrm{Tr}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ pokazujemy, że stożek odwzorowań 2-dodatnich oraz stożek odwzorowań całkowicie dodatnich musi mieć wspólną ścianę. Dodatkowo przedstawiamy algorytm pozwalający badać własności stożków odwzorowań k-dodatnich, na przykładzie odwzorowania Choi.

Rozprawę kończy krótkie podsumowanie prezentowanego materiału, zawierające wybrane sugestie dalszych kierunków badań.

Abstract

The aim of this dissertation is a systematic analysis of any positive map that appears in quantum information theory. In particular, we will show how any map can be characterized in terms of k-positivity using the auxiliary parameter μ_k which determines the k-positivity of the considered maps. We discuss here the problems of the structure of k-positive maps on low-dimensional matrix algebras.

The first chapter is a short introduction and presents the motivation for studying positive maps in quantum information theory.

The second chapter of the dissertation is a reminder of the basic definitions and facts related to the concept of convexity, Hilbert spaces, objects living in these spaces, and the concept of quantum entanglement, as well as the tools needed to describe the measurements and detection of entanglement in the formalism of quantum mechanics.

The third chapter is a reminder of the basic properties of positive maps, some of their classes and representations, as well as known constructions. We discuss here issues related to the characterization of k-positive maps and their additional properties such as decomposability. We show commonly used methods for studying positive maps and discuss in detail some known constructions of positive maps as well as their limitations. These limitations in particular motivate us to present a new method for constructing k-positive maps that are not $(k+1)$-positive.

Chapter four presents the original concept of characterizing any positive map using the Choi-Kraus-Stinespring representation, in particular, it presents the characterization of k-positivity using the auxiliary parameter μ_k. We show that in the special case when the dimensions between which the map differs by 1, we can analytically calculate the parameter μ_k for which the map is k-positive. We present the application of the given characterization using a broadly described example of the proposed maps. In particular, we consider modifications and generalizations of the proposed maps to obtain certain properties such as indecomposability.

In chapter five, we apply our characterization to the Miller-Olkiewicz map, which is exposed in the cone of positive maps, and we conclude that by making a certain modification, by adding the $\lambda \operatorname{Tr}$ map in such a way, that 2-positivity implies a complete positivity, which translates into the following geometrical interpretation: by moving the exposed Miller-Olkiewicz map towards the complete positive maps through the addition of $\lambda \operatorname{Tr}$, for $\lambda \in \mathbb{R}$ we show that the cone of 2-positive maps and the cone of completely positive maps must have a common face structure. Additionally, we present a procedure that allows examining the properties of the cone of k-positive maps, using the Choi map as an example.

The dissertation ends with a short summary of the presented material, containing selected suggestions for further research directions.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

W swojej rozprawie doktorskiej pragnę skupić się na analizie i charakteryzacji odwzorowań *k*-dodatnich które w ogólności pomagają zrozumieć opis specyficznych korelacji kwantowych, które składają się na pojęcie splątanych stanów kwantowych. Termin splątania (niem. *Verschränkung*) pojawił się w pracy [Sch35] w roku 1935 roku określający pewien typ korelacji kwantowych. W tym samym roku Einstein, Podolsky i Rosen na podstawie założeń, Lokalności i Realizmu stwierdzili, że teoria kwantowa jest niekompletna [EPR35]. Rozwiązaniem tego problemu miała być idea ukrytych zmiennych. Aby dowieść swojej tezy zaproponowali eksperyment myślowy, który miał prowadzić do paradoksu - paradoks EPR. Splątanie z fizycznego punktu widzenia oznacza, że jeśli dwa układy oddziaływały ze sobą w przeszłości, to nie można ich rozseparować. Oznacza to, że wiedza o układzie jako całym powinna być większa niż o poszczególnych częściach. W latach 60-tych, J. Bell [Bel64] wychodząc z założeń lokalnego realizmu, wyprowadził nierówności - zwane nierównościami Bella, które powinny być spełnione przez wszystkie teorie spełniające te założenia. Okazało się jednak, że te nierówności mechanika kwantowa może łamać. Bell pokazał przykład jej łamania udowadniając, że założenie lokalnego realizmu w mechanice kwantowej jest błędne. Jednak przykład ten był czysto teoretyczny. Pod koniec lat 60-tych sformułowano uogólnienie nierówności Bella tak aby mogły być zweryfikowane teoretycznie. W latach 80-tych eksperymenty potwierdziły hipotezę istnienia stanów splątanych [ADR82].

Pomimo gwałtownego rozwoju wiedzy na temat praw, które rządzą w mechanice kwantowej, wciąż nie ma zadowalającej odpowiedzi na pytanie: Czym jest splątanie kwantowe? Najprostszą odpowiedzią wydaje się, że jest to pewien rodzaj korelacji. Jednak, w laboratoriach podczas przygotowywania stanów, takie stany mieszane zawierają również z definicji korelacje statystyczne. Wynika stąd, że rozpoznawanie splątania w przypadkach stanów mieszanych jest znacznie trudniejsze niż w przypadku stanów czystych.

Jednym z najważniejszych narzędzi jakich się używa do badania stanów splątanych, jest teoria odwzorowań dodatnich która opiera się o operatory hermitowskie które nazywa się świadkami splątania. Niestety wciąż nie posiadamy pełnej charakteryzacji odwzorowań dodatnich w dowolnym wymiarze. Powoduje to konieczność konstrukcji i badania nowych klas odwzorowań dodatnich a co za tym idzie świadków splątania. Nawet cząstkowe wyniki mogą się przyczynić do analizy złożonej stanów splątanych a w efekcie lepszego zrozumienia samego zjawiska splątania.

Charakteryzacja stanów mieszanych dla wieloukładowych systemów kwantowych ze względu na to czy wykazują one splątanie czy też nie oddziałują ze sobą, czyli są separowalne [Str14, HHHH09] jest jednym z głównych problemów kwantowej teorii informacji. W szczególności głównym zasobem w teorii informacji kwantowej jest splątanie między dwoma quditami (przeważnie qubitami). W niskowymiarowych systemach kwantowych takich jak qubit-qubit, qubit-qutrit posiadamy pełną charakteryzację stanów separowalnych dzięki kryterium Peresa-Horodeckiego [Per96, HHH96]. Dla systemów wyżej-wymiarowych niestety nie posiadamy pełnej charakteryzacji stanów separowalnych. Istnieje jednak wiele kryteriów pozwalających określić czy stan jest separowalny czy splątany. Jednym z dobrych indykatorów splątania jest liczba Schmidta. Przypomnijmy, że stan jest separowalny gdy liczba Schmidta jest równa 1.

W niskowymiarowych przypadkach, autorzy pracy [YLT16] pokazali, że każde odwzorowanie 2-dodatnie z $\mathbb{M}_3$ do $\mathbb{M}_3$ jest rozkładalne co stanowi naturalną kontynuację prac [Wor76a, Stø63, Cho75b]. Wynik ten może być interpretowany dualnie [Stø82, Kye12, MM01] który mówi, że Liczba Schmidta każdego układu składającego się z dwóch qutritów które są PPT jest nie większa niż 2. Pojawiają się naturalne pytania:

(P0) Czy każdy stan w $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m$ o maksymalnej liczbie Schmidta jest stanem NPT ?

Mając na uwadze wyniki Woronowicza [Wor76a], możemy uogólnić powyższe pytanie na rodziny pytań indeksowanych przez $r = 1, 2 \ldots$.

(Pr) Czy każdy stan w $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{m+r}$ jest stanem NPT?

W czasie pisania tej pracy i zgodnie z wiedzą, posiadamy potwierdzającą odpowiedź na pytanie (P0) dla $m = 2, 3$ [YLT16, Kye12] oraz na (P1) dla $m = 2$ [Wor76a].

Zasadniczym celem niniejszej pracy, będzie podanie charakteryzacji odwzorowań dodatnich działających z $\mathbb{M}_m$ do $\mathbb{M}_n$ dla $m \leq n$ które mogą być k-dodatnie dla $k = 1, \ldots, m-1$, które mogą być świadkami splątania dla stanów splątanych. Zastosowanie podanej charakteryzacji zaprezentujemy na przykładzie jednoparametrowej rodziny odwzorowań Φ_a. Dodatkowo charakteryzacja ta pozwala na modyfikację odwzorowań dzięki czemu możliwa jest dokładniejsza analiza struktury danego odwzorowania.

W rozdziale drugim przedstawimy aparat matematyczny niezbędny do opisu układów kwantowych wykorzystując pojęcie przestrzeni Hilberta układu kwantowego. Następnie przedstawimy podstawowe obiekty żyjące na tych przestrzeniach oraz relację pomiędzy takimi obiektami jak i ich strukturę. Podamy różne metody charakteryzacji oraz badania miary splątania.

W rozdziale trzecim przedstawimy podstawowe konstrukcje klas odwzorowań dodatnich jakie można spotkać w kwantowej teorii informacji. Podamy ich charakteryzację oraz pewne szczególnie interesujące z punktu widzenia niniejszej pracy konstrukcje odwzorowań k-dodatnich. Następnie omówimy ich wkład w teorię informacji kwantowej i jak przy pomocy odwzorowań k-dodatnich możemy badać separowalność oraz jak odwzorowania nierozkładalne pomagają lepiej zrozumieć miarę splątania, w sensie liczby Schmidta.

Rozdział czwarty poświęcony jest charakteryzacji k-dodatniości odwzorowań dodatnich. Podane zostaną także przykłady jej zastosowań. Przedstawiona przez nas charakteryzacja ma zastosowanie dla dowolnych odwzorowań dodatnich $\phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ przy wykorzystaniu reprezentacji Choi-Krausa-Stinespringa. Przedstawimy jednoparametrową rodzinę odwzorowań k-dodatnich które nie są $(k+1)$-dodatnie. Dodatkowo wprowadzając pewne modyfikację na zaproponowane odwzorowania możemy wymusić, że otrzymane odwzorowania będą 2-dodatnie i nie będą całkowicie dodatnie i całkowicie kododatnie.

W rozdziale piątym zastosujemy przedstawioną przez nas charakteryzację do odwzorowania Millera-Olkiewicza. Jest to przykład elementu ekstremalnego w stożku odwzorowań dodatnich. Używając tego odwzorowania, skonstruujemy zmodyfikowane odwzorowanie, które będąc we wnętrzu stożka odwzorowań dodatnich, leży jednocześnie na brzegach stożków odwzorowań 2-dodatnich i 3-dodatnich (czyli całkowicie dodatnich). Oznacza to, że w stożku odwzorowań 2-dodatnich istnieje wspólna ściana ze stożkiem odwzorowań całkowicie dodatnich dla tego odwzorowania które działa na trójwymiarowych algebrach macierzowych. Badając własności tej wspólnej ściany, przedstawiamy warunek konieczny jaki musi występować w strukturze macierzy Choi odwzorowania aby istniała wspólna ściana między stożkiem $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{CP}$. Na przykładzie odwzorowania Choi pokażemy algorytm badania stożków odwzorowań k-dodatnich względem ustalonego punktu w stożku.

Rozdział 2

Pojęcia wstępne

W tym dziale omówimy podstawowe narzędzia stosowane w teorii odwzorowań dodatnich oraz teorii splątania. Skupimy się na relacjach między wektorami, macierzami oraz liniowymi odwzorowaniami działającymi na algebrach macierzowych.

2.1 Elementy analizy wypukłej

2.1.1 Zbiory wypukłe i stożki

W fizyce pojęcie wypukłości pojawia się w opisie układu kwantowego. Przykładowo, jeśli układ z pewnym prawdopodobieństwem p znajduje się w stanie ρ_1 i z prawdopodobieństwem $1-p$ w stanie ρ_2, to stanem układu jest mieszanka statystyczna (superpozycja) $p\rho_1 + (1-p)\rho_2$, a więc kombinacja wypukła stanów ρ_1 i ρ_2.

Definicja 2.1. Niech $\mathcal{V}$ oznacza przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.

1. Zbiór $B \subset \mathcal{V}$ nazywamy *wypukłym*, jeśli $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$ dla każdych $x, y \in B$ oraz $\lambda \in [0,1]$.

2. Zbiór $C \subset \mathcal{V}$ nazywamy *stożkiem*, jeśli $\lambda x + \mu y \in C$ dla wszystkich $x, y \in C$ oraz $\lambda, \mu \geq 0$,

Oczywiście każdy stożek jest zbiorem wypukłym. Gdy B jest zwartym zbiorem wypukłym i $0 \notin B$, to rozważamy stożek

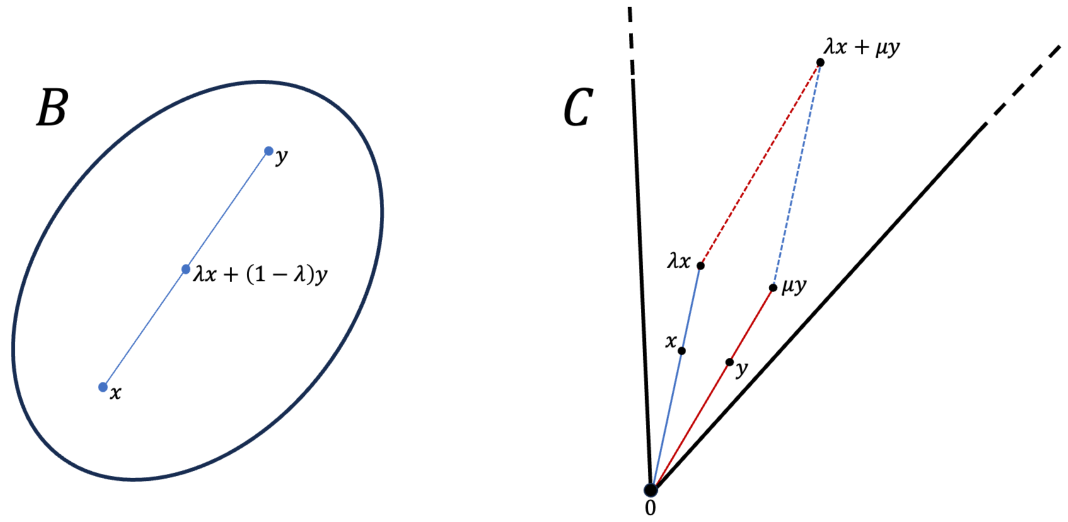
$$C_B = \{\lambda x : x \in B \text{ and } \lambda \geq 0\}. \tag{2.1}$$

Mówimy, że zbiór wypukły B jest *bazą* stożka C_B.

Przykład 2.2. Niech $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i niech $B \subset \mathcal{V}$ będzie kulą n-wymiarową,

$$B = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{2.2}$$

Wtedy B jest zbiorem wypukłym.



Rysunek 2.1: Szkic przedstawia z lewej strony: zbiór wypukły B oraz dwa punkty x i y oraz odcinek złożony z ich kombinacji wypukłych. Z prawej strony stożek C oraz dwa punkty x i y przeskalowane przez λ, $\mu \in \mathbb{R}_+$ oraz suma tych punktów.

Przykład 2.3. Niech $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i

$$C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, n\}.$$

Wtedy C jest stożkiem.

Zauważmy, że dla dowolnej rodziny zbiorów wypukłych $\{W_i\}_{i \in I}$, ich przekrój jest także zbiorem wypukłym.

Definicja 2.4. *Powłoką* wypukłą zbioru $A \subset \mathcal{V}$ nazywamy zbiór $\operatorname{conv}(A)$ będący przekrojem wszystkich zbiorów wypukłych zawierających A.

Zbiór $\operatorname{conv}(A)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym A. Innymi słowy, dla każdego zbioru wypukłego W zawierającego A, zachodzi $\operatorname{conv}(A) \subset W$. Można pokazać, że powłoka wypukła $\operatorname{conv}(A)$ jest zbiorem wszystkich kombinacji wypukłych elementów ze zbioru A.

Przykład 2.5. Niech $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i niech

$$A = \{0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \tag{2.3}$$

gdzie $0 = (0, \ldots, 0)$ oraz $e_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$. Zbiór $S_n = \operatorname{conv}(A)$ nazywamy sympleksem n-wymiarowym. Zauważmy, że

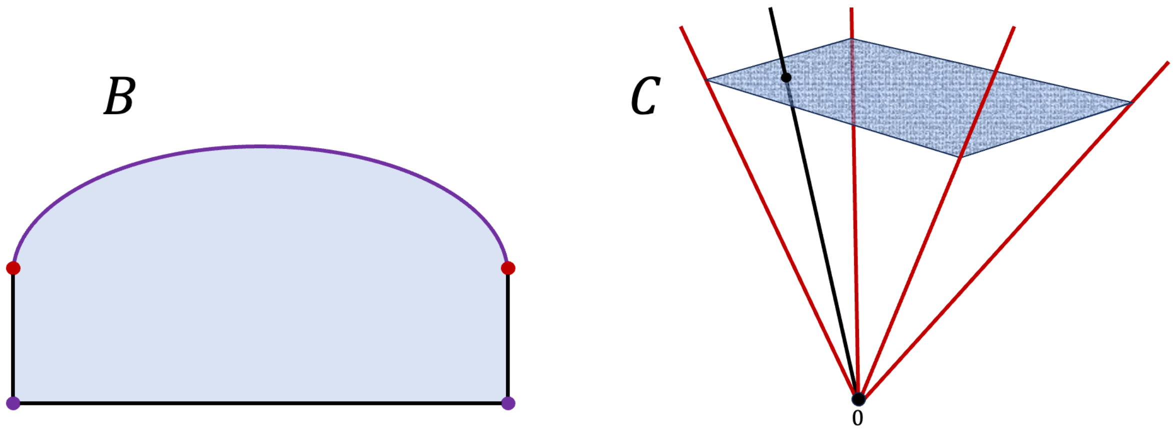
$$S_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{2.4}$$

2.1.2 Ściany, elementy ekstremalne i eksponowane

Rozpocznijmy od następującej definicji.

Definicja 2.6. Niech $B \subset \mathcal{V}$ będzie zbiorem wypukłym, zaś $C \subset \mathcal{V}$ niech będzie stożkiem.

- Punkt $z \in B$ nazywamy *punktem ekstremalnym*, jeśli $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ dla $x, y \in B$ oraz $\lambda \in (0,1)$ implikuje $x = y = z$.
- Punkt $x \in C$ generuje *promień ekstremalny* $\mathbb{R}_0^+ x \subseteq C$ jeśli $x - y \in C$ implikuje $y \in \mathbb{R}_0^+ x$.



Rysunek 2.2: Szkic przedstawia z lewej strony: Zbiór wypukły B z zaznaczonymi punktami ekstremalnymi (czerwone) oraz punktami eksponowanymi (fioletowy). Z prawej, stożek C z bazą (niebieski) i promieniami ekstremalnymi (czerwony).

Gdy $B \subset \mathcal{V}$ jest zbiorem wypukłym, który nie zawiera punktu 0, wtedy promienie ekstremalne stożka $C_B = \mathrm{cone}(B)$ są generowane przez punkty ekstremalne zbioru B. Zbiór punktów ekstremalnych zbioru B będziemy oznaczać $\mathrm{Ext}(B)$. Z twierdzenia Kreina-Millmana wynika, że zbiór wypukły $B \subset \mathbb{R}^n$ jest powłoką wypukłą zbioru punktów ekstremalnych:

$$B = \mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(B)). \tag{2.5}$$

Wynika z tego, że zbiór wypukły jest w pełni scharakteryzowany przez zbiór jego punktów ekstremalnych.

Następujące twierdzenie daje oszacowanie na ilość punktów ekstremalnych potrzebnych do wygenerowania dowolnego punktu poprzez kombinacje wypukłe.

Twierdzenie 2.7 (Caratheodory'ego). *Załóżmy, że* $\dim \mathcal{V} < \infty$. *Jeśli* $B = \mathrm{conv}(S)$ *dla* *pewnego zbioru $S \subset \mathcal{V}$, to każdy punkt $x \in B$ ma rozkład*

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i, \tag{2.6}$$

dla pewnych $x_1, \ldots, x_N \in S$ oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0$ takich, że $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$, gdzie

$$N \leq \dim(\mathcal{V}) + 1. \tag{2.7}$$

Przykład 2.8. Niech S_N będzie sympleksem zdefiniowanym następująco

$$S_N = \left\{ (x_1, \ldots, x_N) : \sum_{j=1}^{N} x_i \leq 1, x_j \geq 0, j = 1, \ldots, N \right\}. \tag{2.8}$$

Wtedy $\mathrm{Ext}(S_N) = \{0, e_1, e_2, \ldots, e_N\}$. Niech $x = (x_1, \ldots, x_N) \in S_N$ będzie punktem, że $\sum_{j=1}^{N} < 1$ oraz $x_j > 0$ dla $j = 1, \ldots N$ dodatkowo niech $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_N \geq 0$ takie, że $\sum_{j=0}^{N} \lambda_j = 1$. Możemy wyrazić punkt x jako

$$x = \lambda_0 0 + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j. \tag{2.9}$$

Z powyższego widzimy, ze $\lambda_j = x_j$ dla $j = 1, \ldots, N$ oraz w konsekwencji $\lambda_0 = 1 - \sum_{j=1}^{N} x_j$. Wynika z tego, że punktu x z sympleksu S_N nie można przedstawić jako kombinacji wypukłej przy wykorzystaniu nie więcej niż $N + 1$ punktów ekstremalnych.

Wniosek 2.9. *Dla każdego zwartego zbioru $S \subset \mathcal{V}$, otoczka wypukła* $\mathrm{conv}(S)$ *jest również zwarta.*

Przypomnijmy, że hiperprzestrzenią afiniczną nazywamy podprzestrzeń afiniczną kowymiaru 1.

Definicja 2.10. Niech $B \subset \mathcal{V}$ będzie zbiorem wypukłym, zaś $C \subset \mathcal{V}$ stożkiem.

- Punkt $x \in B$ nazywamy *eksponowanym*, jeśli istnieje hiperprzestrzeń afiniczna $H \subset \mathcal{V}$ taka, że $B \cap H = \{x\}$.
- Punkt $y \in C$ generuje *promień eksponowany*, jeśli istnieje hiperprzestrzeń $H \subset \mathcal{V}$ taka, że $C \cap H = \mathbb{R}_0^+ x$.

Okazuje się, że w pewnym sensie struktura punktów ekstremalnych jest wyznaczona przez punkty eksponowane.

Twierdzenie 2.11 (Straszewicza). *Dla dowolnego domkniętego zbioru wypukłego $\mathcal{V}$, zbiór punktów eksponowanych w $\mathcal{V}$ jest gęstym podzbiorem zbioru punktów ekstremalnych w $\mathcal{V}$.*

2.1.3 Stożki dualne

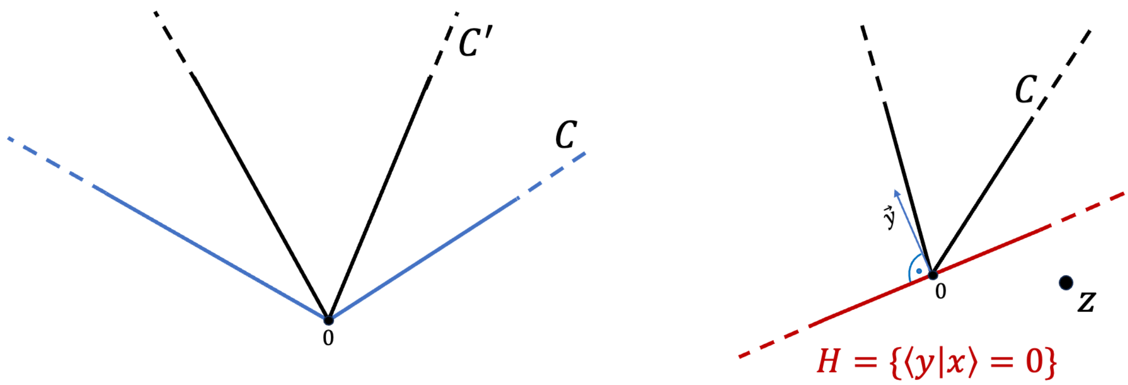
Dla dowolnego stożka $C \subset \mathcal{V}$ w rzeczywistej przestrzeni liniowej $\mathcal{V}$ wyposażonej w iloczyn skalarny definiujemy *stożek dualny* C' jako

$$C' = \{y \in \mathcal{V} : \ \langle y|x \rangle \geq 0 \text{ dla wszystkich } x \in C\}. \tag{2.10}$$

Stożek dualny spełnia następujące twierdzenie o oddzielaniu.

Twierdzenie 2.12. *Jeśli $C \subset \mathcal{V}$ jest niepustym domkniętym stożkiem i $z \neq C$, to istnieje punkt $y \in C^{'}$ taki, że*

$$\langle y|z \rangle < 0. \tag{2.11}$$



Rysunek 2.3: Szkic przedstawia z lewej strony: Stożek C i stożek do niego dualny C'. Z prawej strony: hiperpłaszczyzna (czerwona) oddziela punkt z od stożka C.

Wniosek 2.13 (Polarność)**.** *Dla dowolnego domkniętego stożka $C \subset \mathcal{V}$ w rzeczywistej przestrzeni Hilberta $\mathcal{V}$ mamy następującą równość*

$$C'' = C. \tag{2.12}$$

Dowód. Zawieranie $\left(C'\right)' \supseteq C$ jest oczywiste. W drugą stronę, rozważmy element $x \notin C$. Z twierdzenia o oddzielaniu, istnieje punkt $y \in C'$ taki, że $\langle y|x \rangle < 0$. Wynika stąd, że $x \notin \left(C'\right)'$. ■

Lemat 2.14 (Punkty wewnętrzne [Roc70])**.** *Niech $C \subset \mathcal{V}$ będzie stożkiem domkniętym. Wtedy $y \in \operatorname{int}(C')$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\langle y|x \rangle > 0, \tag{2.13}$$

dla dowolnego $x \in C \setminus \{0\}$.

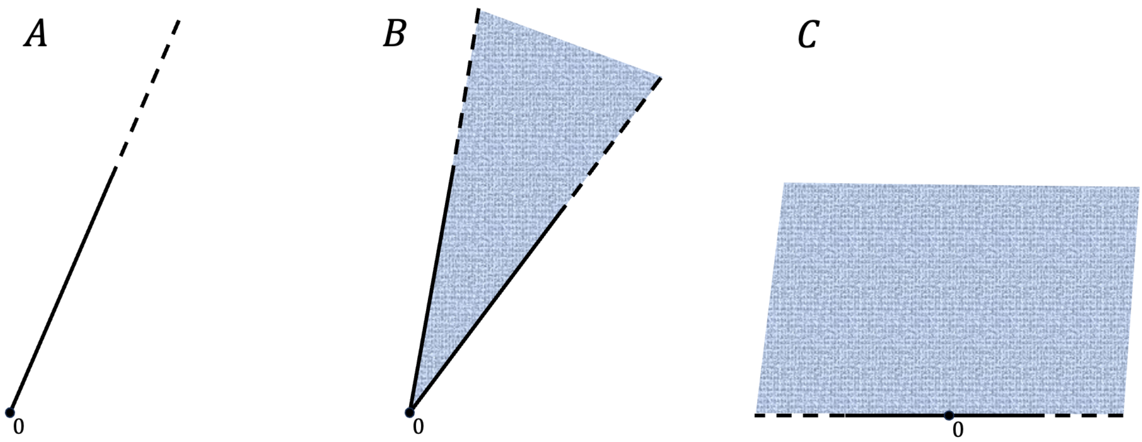
Lemat 2.15. *Niech $C \subset \mathcal{V}$ będzie domkniętym stożkiem. Następujące warunki są równoważne*

1. *Stożek C jest wyostrzony (ang. pointed), tzn. $C \cap (-C) = \{0\}$.*
2. *Stożek C' jest generujący, tzn. $C' + (-C') = \mathcal{V}$.*
3. *Stożek C' posiada niepuste wnętrze.*

Dla dowolnego domkniętego stożka wyostrzonego $C \subset \mathcal{V}$ możemy rozważyć punkt $y \in \operatorname{int}(C')$ i zdefiniować zbiór wypukły $B \subset C$ poprzez $B = C \cap H$, gdzie

$$H = \{x \in \mathcal{V} : \langle y|x\rangle = 1\}. \tag{2.14}$$

Można sprawdzić, że $B = C \cap H$ jest ciałem wypukłym nie zawierającym zera, w związku z czym jest bazą dla stożka C.



Rysunek 2.4: Szkic przedstawia stożki w $\mathbb{R}^2$ które są: A: wyostrzony ale nie generujący; B: punktowy i generujący; C: nie punktowy ale generujący.

Stożek $C \subset \mathcal{V}$ nazywamy *właściwym* jeśli jest domknięty, wyostrzony oraz generujący. Stożek właściwy posiada hierarchię podzbiorów nazywanych ścianami.

Definicja 2.16. Niech $C \subset \mathcal{V}$ będzie stożkiem właściwym i $K \subset C$. Zbiór K nazywamy *ścianą* stożka C, jeśli $x - y \in K$ implikuje $y \in K$ dla dowolnych $x \in K$, $y \in C$.

Zauważmy, że cały stożek K jest swoją ścianą.

Lemat 2.17. *Niech $C \subset \mathcal{V}$ będzie stożkiem oraz $K \subset C$ ścianą. Wtedy* $\operatorname{Ext}(K) = C \cap \operatorname{Ext}(C)$.

Dowód. Załóżmy, że $x \in \operatorname{Ext}(K)$. Pokażemy, że $x \in \operatorname{Ext}(C)$. Załóżmy, że $y \in C$ oraz $x - y \in C$. Ponieważ $x \in K$ oraz K jest ścianą to $y \in K$ oraz $x - y \in K$. Z ekstremalności x w K dostajemy, że $y = \lambda x$ dla pewnej nieujemnej stałej λ w związku z czym $x \in \operatorname{Ext}(C)$. Czyli pokazaliśmy, że $\operatorname{Ext}(K) \subset K \cap \operatorname{Ext}(C)$. Zawieranie odwrotne jest oczywiste. ∎

2.2 Operatory na przestrzeniach Hilberta

2.2.1 Podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni Hilberta i operatorów działających na nich

Przestrzeń Hilberta

Przestrzenie Hilberta są narzędziem matematycznym służącym do opisu układów kwantowych. Definiuje się przy ich pomocy takie pojęcia jak stan układu, można scharakteryzować różne rodzaje stanów, opisać ich ewolucję oraz określić wielkości mierzalne wraz z opisem pomiarów.

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych. Zgodnie z notacją Diraca [Dir39] elementy przestrzeni $\mathcal{H}$ będziemy zapisywali jako $|x\rangle$, zaś elementy przestrzeni dualnej jako $\langle y| := |y\rangle^\dagger$.

Przypomnijmy, że iloczynem skalarnym nazywamy funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ spełniającą następujące warunki

1. $\langle x|x\rangle \geq 0, \qquad \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow |x\rangle = 0,$
2. $\langle x|ay\rangle = a\,\langle x|y\rangle,$
3. $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle,$
4. $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle},$

dla wszystkich $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle, \in \mathcal{H}$ oraz $a \in \mathbb{C}$.

Mając zdefiniowany iloczyn skalarny możemy zdefiniować normę

$$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}, \tag{2.15}$$

dla $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Mówiąc, że wektor $|x\rangle$ jest unormowany, mamy na myśli, że spełnia warunek $\|x\| = 1$. Mówimy, że układ wektorów $|y_i\rangle$ jest bazą ortonormalną, jeśli

$$\langle y_i|y_j\rangle = \delta_{i,j}. \tag{2.16}$$

Dla każdego $|x\rangle \in \mathcal{H}$ możemy zapisać

$$|x\rangle = \sum_i c_i\,|y_i\rangle\,, \tag{2.17}$$

gdzie współczynniki zadane są wzorem $c_i = \langle x|y_i\rangle$. Można udowodnić następujący związek między długością (normą) wektora a iloczynem skalarnym

$$|\,\langle x|y\rangle\,| \leq \|x\|\|y\|, \quad \text{dla wszystkich } |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H} \tag{2.18}$$

nazywany *nierównością Schwarza*.

Przykład 2.18. Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni $\mathbb{C}^n$ wzorem

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i, \tag{2.19}$$

gdzie $|x\rangle = (x_1, \ldots, x_n)^T$ i $|y\rangle = (y_1, \ldots, y_n)^T$ oraz $x_i, y_i \in \mathbb{C}$. Z tym iloczynem skalarnym stowarzyszony jest wzór na długość euklidesową

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Powyższy przykład jest ogólny. Można bowiem wykazać, że każda skończenie wymiarowa przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^n$, gdzie $n = \dim \mathcal{H}$.

Odwzorowania liniowe na przestrzeniach Hilberta

Niech $\mathcal{H}$ będzie pewną przestrzenią Hilberta taką, że $\dim \mathcal{H} = n$, $n \in \mathbb{N}$, zaś układ wektorów $|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle \in \mathcal{H}$ będzie pewną bazą ortonormalną. Jeśli nie będzie to inaczej powiedziane, to zazwyczaj będziemy przyjmowali, że $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, zaś baza jest bazą kanoniczną. Ze standardowego kursu algebry liniowej wiadomo, że dowolnemu odwzorowaniu liniowemu $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ można przyporządkować macierz kwadratową $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ taką, że

$$A \left|v_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left|v_i\right\rangle, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Niech $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań liniowych działających z $\mathcal{H}$ w $\mathcal{H}$. Zbiór ten ma strukturę przestrzeni liniowej. Operacja

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni (A, B) \mapsto AB \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

składania odwzorowań definiuje (nieprzemienne) mnożenie w $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, które spełnia własności rozdzielności względem dodawania. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ wyposażone w to mnożenie ma więc strukturę algebry. Ponadto, dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ określamy *operator sprzężony* $A^\dagger$ określony jednoznacznie zależnością

$$\langle x| A^\dagger |y\rangle = \langle Ax|y\rangle, \qquad |x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}. \tag{2.21}$$

Przyporządkowanie $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto A^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ma następujące własności:

- $(\lambda A + \mu B)^\dagger = \overline{\lambda} A^\dagger + \overline{\mu} B^\dagger$,
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$,
- $(A^\dagger)^\dagger = A$

dla dowolnych $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Przyporządkowanie to jest więc *inwolucją antyliniową*. Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ wraz z tą inwolucją jest *-algebrą.

Niech $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych o współczynnikach zespolonych. Zbiór ten również ma strukturę *-algebry, gdzie dodawanie, mnożenie i inwolucja są standardowym dodawaniem macierzy, mnożeniem macierzy i sprzężeniem macierzy. Na dodatek, przyporządkowanie $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ określone formułą (2.20) jest izomorfizmem *-algebr. W dalszym ciągu pracy obie te struktury będziemy utożsamiali i często operator liniowy będziemy traktowali tak jak macierz i na odwrót.

Przypomnijmy, że operatory liniowe działające na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta są ograniczone, tzn. jeśli $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, to istnieje liczba $C > 0$ taka, że

$$\|A\,|x\rangle\| \leq C\||x\rangle\|, \qquad |x\rangle \in \mathcal{H}. \tag{2.22}$$

Kres dolny zbioru liczb C spełniający warunek (2.22) nazywamy *normą operatorową* operatora A i oznaczamy $\|A\|$. Oprócz standardowych warunków spełnianych przez każdą normę, norma operatorowa spełnia

- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$,
- $\|A^\dagger\| = \|A\|$,
- $\|A^\dagger A\| = \|A\|^2$

dla dowolnych $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Powyższe warunki implikują, że $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ z normą operatorową jest C*-algebrą.

2.2.2 Wybrane klasy operatorów

Operatory hermitowskie

Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy *hermitowskim* (lub *samosprzężonym*), jeśli $A^\dagger = A$. Niech $\mathcal{B}_{\mathrm{h}}(\mathcal{H})$ oznacza zbiór wszystkich operatorów hermitowskich. Można łatwo uzasadnić, że jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie przez liczby rzeczywiste, ma zatem strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbiór ten nie jest zamknięty ze względu na mnożenie operatorów. Dokładniej, jeśli $A, B \in \mathcal{B}_{\mathrm{h}}(\mathcal{H})$, to warunek $AB \in \mathcal{B}_{\mathrm{h}}(\mathcal{H})$ jest równoważny temu, że operatory A i B komutują, tzn. $AB = BA$.

Operatory unitarne

Operatorem *unitarnym* nazywamy operator U taki, że $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ to operator identycznościowy czyli taki, że $\mathbb{1}\,|x\rangle = |x\rangle$ dla dowolnego $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Z definicji wynika, że operator unitarny U jest odwracalny i $U^{-1} = U^\dagger$. Z definicji wynika również, że operator U jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy uperatory U i $U^\dagger$ są izometriami, tzn. $\|U\,|x\rangle\| = \|U^\dagger\,|x\rangle\| = \||x\rangle\|$ dla każdego $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Zbiór operatorów unitarnych jest zamknięty ze względu na mnożenie i elementy odwrotne, zatem tworzy grupę nazywaną *grupą unitarną*. Oznaczamy ją przez $\mathbb{U}(n)$.

Operatory dodatnio określone

Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy *dodatnio określonym*, jeśli $\langle v|\,A\,|v\rangle \geq 0$ dla wszystkich wektorów $|v\rangle \in \mathcal{H}$. Fakt, że operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jest dodatnio określony, będziemy zapisywać krótko $A \geq 0$. Z uwagi na tę notację operatory dodatnio określone często będziemy nazywali operatorami dodatnimi. Zbiór operatorów dodatnio określonych oznaczać będziemy przez $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$. Każdy operator dodatnio określony jest hermitowski. Mamy zatem zawieranie $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+ \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$. Zauważmy, że jeśli $A \geq 0$ i $B \geq 0$, to $A + B \geq 0$ oraz jeśli liczba λ jest nieujemna, to $\lambda A \geq 0$. Zbiór $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ jest zatem stożkiem. Można pokazać, że jest on stożkiem właściwym w $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$.

Jest wiele równoważnych warunków które pozwalają scharakteryzować operatory dodatnio określone. Niżej przedstawiamy parę przykładów warunków równoważnych dodatniości operatora A. Liczby a_{ij} są współczynnikami macierzy operatora A określonymi w ((2.20)). Przypomnijmy też o konwencji utożsamiania operatora z jego macierzą.

(1) $\sum_{i,j=1}^{n} \overline{z_i} z_j a_{ij} \geq 0$ dla dowolnych $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

(2) A jest hermitowski oraz wszystkie jego wartości własne są nieujemne.

(3) A jest hermitowski i wszystkie jego minory główne są nieujemne.

(4) $A = B^\dagger B$ dla pewnego operatora B.

(5) $A = B^2$ dla pewnego operatora dodatniego B. Warto tutaj zaznaczyć, że operator B jest wyznaczony jednoznacznie tym warunkiem. Oznaczamy go $A^{1/2}$ i nazywamy pierwiastkiem operatora A.

(6) Istnieją liczby nieujemne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ oraz operator unitarny U takie, że

$$A = U^\dagger \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} U.$$

(7) Istnieją wektory $|x_1\rangle, \ldots, |x_n\rangle \in \mathcal{H}$ takie, że $a_{ij} = \langle x_i | x_j \rangle$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Projektory

Projektorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy operator $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, który jest hermitowski i *idempotentny*, tzn.

$$P^2 = P. \tag{2.23}$$

Z powyższej definicji wynika, że

$$\langle x|Px\rangle = \left\langle x \middle| P^2 x \right\rangle = \langle Px|Px\rangle = \|Px\|^2 \geq 0, \qquad |x\rangle \in \mathcal{H}, \tag{2.24}$$

zatem projektor jest dodatnio określony. Możemy także zaobserwować, że

$$\|P\| = \left\|P^2\right\| = \left\|P^\dagger P\right\| = \|P\|^2, \tag{2.25}$$

zatem dla niezerowego projektora mamy $\|P\| = 1$.

Jeśli P jest projektorem, to jego obraz $P\mathcal{H}$ jest domkniętą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$. Z definicji projektora wynika, że

$$P\mathcal{H} = \{|v\rangle \in \mathcal{H} : \ P|v\rangle = |v\rangle\}, \tag{2.26}$$

zatem $P\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią własną projektora P odpowiadającą wartości własnej 1. Na odwrót, dla każdej domkniętej podprzestrzeni $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ istnieje jednoznacznie określony projektor $P_{\mathcal{K}}$ taki, że $\mathcal{K} = P_{\mathcal{K}}\mathcal{H}$. Przyporządkowanie $\mathcal{K} \mapsto P_{\mathcal{K}}$ określa zatem wzajemnie jednoznaczą odpowiedniość między domkniętymi podprzestrzeniami w $\mathcal{H}$ i projektorami na $\mathcal{H}$. Jeśli P, Q są projektorami, to warunek $PQ = 0$ jest równoważny temu, że $P\mathcal{H} \perp Q\mathcal{H}$. Mówimy wtedy, że projektory P i Q są ortogonalne. Zauważmy także, że projektory z obrazem jednowymiarowym, tzn. takie, że $P\mathcal{H} = \mathbb{C}\,|x\rangle$ dla pewnego unormowanego wektora $|x\rangle \in \mathcal{H}$, są postaci $|x\rangle\langle x|$, gdzie operator $|\phi\rangle\langle\psi|\,|\xi\rangle := \langle\psi|\xi\rangle\ |\phi\rangle$ dla $\phi, \psi, \xi \in \mathcal{H}$.

Dla dowolnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i dla operatora samosprzężonego A mamy przedstawienie

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda E(d\lambda) \tag{2.27}$$

gdzie E jest miarą spektralną operatora A. Jest to tzw. rozkład spektralny operatora A. W naszej pracy zajmujemy się przestrzeniami skończenie wymiarowymi. W związku z tym pominiemy szczegółowe omówienie równości (2.27). Poprzestańmy jedynie na stwierdzeniu, że na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta operator samosprzężony A może zostać zapisany jako kombinacja liniowa

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i, \tag{2.28}$$

parami ortogonalnych projektorów $\{P_i\}$ ze współczynnikami λ_i, które są rzeczywistymi wartościami własnymi operatora A. Projektory P_i rzutują na podprzestrzenie generowane przez wektory własne odpowiadające odpowiednim wartościom własnym. A jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\lambda_i \geq 0$ i projektory P_i takie, że A jest postaci (2.28).

Możliwość rozkładu (2.28) każdego operatora dodatniego pozwala uzasadnić promienie ekstremalne stożka $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ które są wyznaczone przez projektory jednowymiarowe, tj. są postaci $\mathbb{R}_+\,|x\rangle\langle x|$, gdzie $|x\rangle \in \mathcal{H}$.

2.3 Normy na $B(H)$

W części 2.2.1 przypomnieliśmy własności normy operatorowej określonej dla elementów $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ponieważ rozważamy tylko przestrzenie skończenie wymiarowe, wszystkie normy określone na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ są równoważne. Jednak z punktu widzenia zastosowań kilka z nich jest warta przypomnienia [Bha97, HJ85, Li94, Li99, JK10].

Śladem operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1} \langle e_i|\, A\, |e_i\rangle\,, \tag{2.29}$$

gdzie $|e_1\rangle\,, \ldots, |e_n\rangle$ jest pewną bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Okazuje się, że określenie to nie zależy od wyboru bazy. Jeśli (a_{ij}) jest macierzą operatora A, to oczywiście $\operatorname{Tr} A =$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Przyporządkowanie

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto \operatorname{Tr} A \in \mathbb{C}$$

jest funkcjonałem liniowym. Ma on dwie ważne własności:

- $\operatorname{Tr}\left(A^\dagger A\right) \geq 0$ dla $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (dodatniość)
- $\operatorname{Tr}\left(A^\dagger A\right) = 0$ implikuje $A = 0$ dla $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (wierność)
- $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ dla $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ostatnia własność bywa nazywana śladowością, ponieważ jest unikalną własnością śladu. Własność dodatniości jest równoważna warunkowi, że $\operatorname{Tr} A \geq 0$ dla $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$.

Przypomnijmy także, że wartością singularną operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy wartość własną operatora $|A| := (A^\dagger A)^{1/2}$. Niech $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ będzie nierosnącym ciągiem wartości singularnych operatora A. W ciągu tym każda wartość powtarza się tyle razy ile wynosi jej krotność. Ponieważ $|A|$ jest operatorem dodatnio określonym, ostatnia, a co za tym idzie, wszystkie wartości singularne są nieujemne.

Dla normy operatorowej zachodzi równość

$$\|A\| = \sigma_1. \tag{2.30}$$

Norma śladowa

Jeśli $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, to normę śladową operatora A określamy następująco

$$\|A\|_1 := \operatorname{Tr} |A|. \tag{2.31}$$

Zauważmy, że gdy $A \geq 0$ to $\|A\|_1 = \operatorname{Tr} A$. Normę śladową możemy scharakteryzować przy pomocy wartości singularnych następująco

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

Dla operatorów $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ prawdziwa jest nierówność

$$\|AB\|_1 \leq \|A\| \|B\|_1. \tag{2.32}$$

Norma Hilberta-Schmidta (Frobeniusa)

Normę Hilberta-Schmidta operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiujemy jako

$$\|X\|_2 := \left(\operatorname{Tr} A^\dagger A\right)^{1/2} \tag{2.33}$$

Zachodzą następujące równości:

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \tag{2.34}$$

gdzie $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ są wartościami singularnymi operatora A, zaś (a_{ij}) jest macierzą operatora A.

Na przestrzeni $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ rozważamy formę półtoraliniową

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni (A, B) \mapsto \langle A|B\rangle_{\mathrm{HS}} \in \mathbb{C}$$

zdefiniowaną jako

$$\langle A|B\rangle_{\mathrm{HS}} = \mathrm{Tr}\Big(A^{\dagger}B\Big). \tag{2.35}$$

Z własności śladu wynika, że $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathrm{HS}}$ jest iloczynem skalarnym, zaś $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ wyposażona w ten iloczyn ma strukturę przestrzeni Hilberta. Norma Hilberta-Schmidta jest normą indukowaną przez ten iloczyn skalarny:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\langle A|A\rangle_{\mathrm{HS}}}. \tag{2.36}$$

Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ spełniona jest zatem nierówność Schwarza

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_2\|B\|_2. \tag{2.37}$$

Normy Ky-Fana

Niech $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ będzie ciągiem wartości singularnych operatora A. Niech $1 \leq k \leq n$. Określamy k-tą normę Ky-Fana [Fan51] jako

$$\|X\|_{(k)} := \sum_{i=1}^{k} \sigma_i. \tag{2.38}$$

Zauważmy, że norma operatorowa i śladowa są szczególnymi przypadkami k-tej normy Ky-Fana dla $k = 1$ i $k = n$.

2.4 Iloczyny tensorowe

2.4.1 Iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta

W mechanice kwantowej układom złożonym odpowiadają iloczyny tensorowe przestrzeni Hilberta podukładów

$$\mathcal{H}_A \odot \mathcal{H}_B = span\{|x\rangle \otimes |y\rangle : |x\rangle \in \mathcal{H}_A, |y\rangle \in \mathcal{H}_B\}, \tag{2.39}$$

dla dwóch przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ zachodzi

1. $(|x_1\rangle + |x_2\rangle) \otimes |y\rangle = |x_1\rangle \otimes |y\rangle + |x_2\rangle \otimes |y\rangle$,
2. $|x\rangle \otimes (|y_1\rangle + |y_2\rangle) = |x\rangle \otimes |y_1\rangle + |x\rangle \otimes |y_2\rangle$,
3. $(\lambda\,|y\rangle) \otimes |x\rangle = \lambda(|y\rangle \otimes |x\rangle)$,
4. $|y\rangle \otimes (\lambda\,|x\rangle) = \lambda(|y\rangle \otimes |x\rangle)$,

dla dowolnych $|x\rangle, |x_1\rangle, |x_2\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|y\rangle, |y_1\rangle, |y_2\rangle \in \mathcal{H}_B$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Elementy $|y\rangle \otimes |x\rangle$ nazywamy tensorem prostym. Dowolny element przestrzeni $\mathcal{H}_A \odot \mathcal{H}_B$ można przedstawić jako kombinację liniową tensorów prostych, czyli $\sum_i |y_i\rangle \otimes |x_i\rangle$ przy czym trzeba zauważyć, że przedstawienie takie nie jest jednoznaczne. Iloczyn skalarny na tensorach prostych definiujemy jako

$$\langle x_1 \otimes y_1 | x_2 \otimes y_2 \rangle := \langle x_1 | y_1 \rangle_A \langle x_2 | y_2 \rangle_B, \tag{2.40}$$

W naturalny sposób możemy zatem rozszerzyć definicję iloczynu skalarnego na wszystkie elementu przestrzeni $\mathcal{H}_A \odot \mathcal{H}_B$. W końcu, przestrzeń $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ oznaczamy nową przestrzeń Hilberta będącą uzupełnieniem przestrzeni $\mathcal{H}_A \odot \mathcal{H}_B$ i nazywamy iloczynem tensorowym.

Przykład 2.19. Niech $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^m$ i $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^n$. Niech $|e_1\rangle, \ldots, |e_m\rangle$ i $|f_1\rangle, \ldots, |f_n\rangle$ będą bazami ortonormalnymi w przestrzeni $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ odpowiednio takimi, że $|e_i\rangle = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, na i-tym miejscu jest jeden i zero w pozostałych miejscach. Wtedy układ tensorów prostych $\{|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ jest bazą w $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Wynika stąd, że $\dim(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = m \cdot n = \dim(\mathcal{H}_A) \cdot \dim(\mathcal{H}_B)$, czyli $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^{mn}$.

Niech $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B$ będą przestrzeniami Hilberta i niech $A : \mathcal{H}_A \to \mathcal{K}_A$ oraz $B : \mathcal{H}_B \to \mathcal{K}_B$ będą odwzorowaniami liniowymi. Dla skończenie wymiarowych przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B . \mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B$ istnieje liniowe odwzorowanie

$$A \otimes B : \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \to \mathcal{K}_A \otimes \mathcal{K}_B, \tag{2.41}$$

zdefiniowane na tensorach prostych jako $(A \otimes B)(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) = A|\psi_A\rangle \otimes B|\psi_B\rangle$.

Niech $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \simeq \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{mn}$ (gdzie $m, n \geq 2$).

Twierdzenie 2.20 (Rozkład Schmidta [Eke95, NC10, Sch07]). *Jeśli $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, to istnieją zbiory ortogonalne stanów $\{|a_i\rangle\}$ i $\{|b_i\rangle\}$ takie, że*

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle, \tag{2.42}$$

gdzie $\lambda_i \geq 0$ oraz $\sum_i \lambda_i^2 = 1$.

Współczynniki λ_i nazywa się *współczynnikami Schmidta*. Ilość niezerowych współczynników Schmidta określa się jako *rząd Schmidta $SR(|\psi\rangle)$* wektora $|\psi\rangle$. Wektor $|\psi\rangle$ jest produktowy wtedy i tylko wtedy gdy ma rząd Schmidta jeden.

2.4.2 Operatory na iloczynie tensorowym przestrzeni Hilberta

Niech $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta i $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Fakt, że $\mathcal{H}$ ma strukturę iloczynu tensorowego, powoduje, że operatory z $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ są obiektami bardziej złożonymi.

Rozpocznijmy od następującej obserwacji. Jeśli $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ i $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$, to możemy rozważać operator $X \otimes Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zdefiniowany następująco

$$(X \otimes Y)(|x\rangle \otimes |y\rangle) = X|x\rangle \otimes Y|y\rangle, \tag{2.43}$$

gdzie $|x\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|y\rangle \in \mathcal{H}_B$ są dowolnymi wektorami. Ponieważ tensory proste rozpinają całą przestrzeń $\mathcal{H}$, powyższa definicja jednoznacznie określa operator $X \otimes Y$. Rozważając kombinacje liniowe tego typu operatorów produktowych, otrzymujemy $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_B) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Używając argumentu opartego na wymiarach przestrzeni po obu stronach tej inkluzji można uzasadnić, że w istocie zachodzi równość. Uzasadniliśmy zatem następujący izomorfizm

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_B). \tag{2.44}$$

Na poziomie algebr macierzowych, mamy z kolei następujące utożsamienie

$$\mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C}). \tag{2.45}$$

W naszych rozważaniach często także będziemy wykorzystywać strukturę blokową operatorów z $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, wynikającą ze struktury iloczynu tensorowego w $\mathcal{H}$. Niech $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ponadto, niech $(|e_i\rangle)$ będzie bazą przestrzeni $\mathcal{H}_A$. Wtedy układ operatorów $(|e_i\rangle\langle e_j|)_{i,j=1,\ldots,m}$ jest bazą w $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$. Z izomorfizmu (2.44) wynika, że istnieją jednoznacznie określone operatory $Z_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$, $i, j = 1, \ldots, m$, takie, że

$$Z = \sum_{i,j=1}^{m} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes Z_{ij}. \tag{2.46}$$

Na operator Z możemy zatem patrzeć jak macierz $(Z_{ij}) \in \mathbb{M}_m(\mathcal{B}(\mathcal{H}_B))$ o współczynnikach z $\mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ lub $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Do utożsamień z (2.44) i (2.45) możemy zatem dopisać kolejne

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_B) = \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{M}_m(\mathcal{B}(\mathcal{H}_B)) = \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})). \tag{2.47}$$

2.4.3 Liczba Schmidta

W tej części opiszemy pewne narzędzie służące do opisu struktury operatorów ze stożka $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+$. Rozważmy najpierw pewien przykład. Niech $X_1, \ldots, X_N \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)^+$, $Y_1, \ldots, Y_N \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)^+$ i niech

$$Z = \sum_{k=1}^{N} X_k \otimes Y_k. \tag{2.48}$$

Oczywiście $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+$. Okazuje się jednak, że nie każdy operator dodatni działający na iloczynie tensorowym jest postaci (2.48). Ponieważ projektory jednowymiarowe są ekstremalne w stożku operatorów dodatnich, istnieją wektory unormowane $|x_{ik}\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|y_{jk}\rangle \in \mathcal{H}_B$ oraz współczynniki $\lambda_{ik} \geq 0$, $\mu_{jk} \geq 0$ takie, że

$$X_k = \sum_i \lambda_{ik} |x_{ik}\rangle\langle x_{ik}|, \qquad Y_k = \sum_j \mu_j |y_{jk}\rangle\langle y_{jk}| \tag{2.49}$$

dla każdego $k = 1, \ldots, N$. Mamy zatem

$$Z = \sum_k \sum_{i,j} \lambda_{ik}\mu_{jk} \left|x_{ik}\right\rangle\!\left\langle x_{ik}\right| \otimes \left|y_{jk}\right\rangle\!\left\langle y_{jk}\right| \tag{2.50}$$

$$= \sum_{k,i,j} \lambda_{ik}\mu_{jk} \left|x_{ik} \otimes y_{jk}\right\rangle\!\left\langle x_{ik} \otimes y_{jk}\right|. \tag{2.51}$$

Przedstawiliśmy zatem operator Z w postaci kombinacji wypukłej projektorów jednowymiarowych, z których każdy jest wyznaczony przez wektor produktowy, a więc wektor o rzędzie Schmidta równym 1. Nie ma żadnego powodu aby liczyć na to, że to samo da się zrobić dla dowolnego operatora z $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+$. Ogólnie, dla dowolnego operatora dodatniego Z definiujemy jego *liczbę Schmidta* $SN(Z)$ jako najmniejszą liczbę naturalną k taką, że Z możemy zapisać jako $Z = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left|v_i\right\rangle\!\left\langle v_i\right|$, gdzie $\left|v_i\right\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ są wektorami takimi, że $SR(\left|v_i\right\rangle) \leq k$ dla wszystkich i oraz $\lambda_i \geq 0$. Z definicji tej wynika, że Z jest postaci (2.48) wtedy i tylko wtedy, gdy $SN(Z) = 1$.

Dla ustalonego k, niech

$$S_k = \{Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+ : \ SN(Z) \leq k\}. \tag{2.52}$$

Można uzasadnić, że S_k jest stożkiem właściwym w $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Ponadto mamy następujący ciąg inkluzji

$$S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_{\min\{m,n\}} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+. \tag{2.53}$$

2.5 Klasy dodatniości operatorów na iloczynach tensorowych

Niech $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta i niech $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, gdzie $m = \dim \mathcal{H}_A$ i $n = \dim \mathcal{H}_B$. Mówimy, że operator hermitowski $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ jest k-blokowo dodatni jeśli

$$\left\langle v\right| X \left|v\right\rangle \geq 0, \tag{2.54}$$

dla każdego wektora $\left|v\right\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ takiego, że $SR(\left|v\right\rangle) \leq k$. Zauważmy, że gdy $k = \min\{m, n\}$, to k-blokowa dodatniość jest równoważna warunkowi dodatniej określoności operatora X.

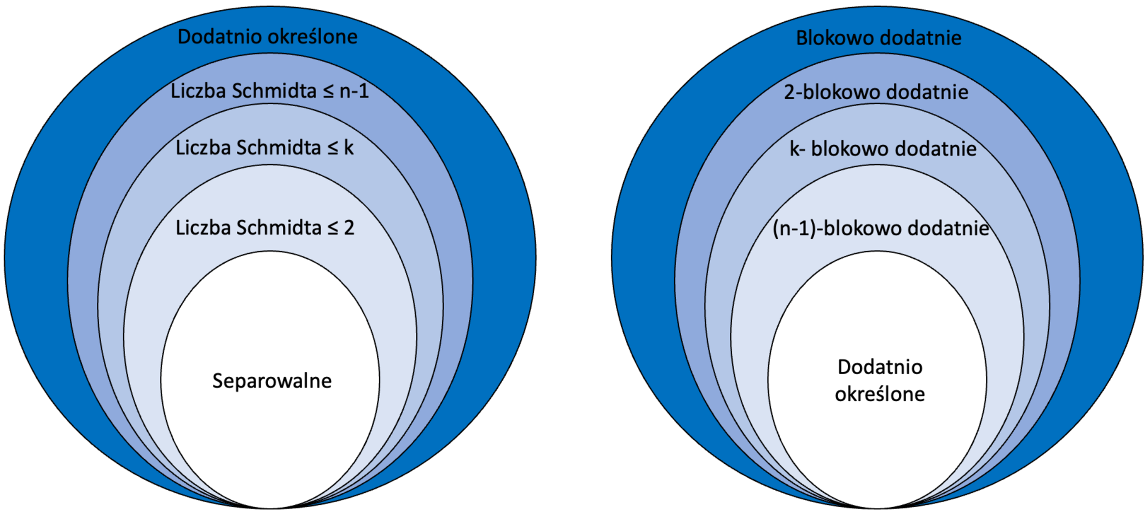
W przypadku gdy $k = 1$ warunek k-blokowej dodatniości oznacza $\left\langle v\right| X \left|v\right\rangle \geq 0$ dla każdego wektora produktowego $\left|v\right\rangle$. Mówimy wtedy, że X jest blokowo dodatni. Aby zrozumieć lepiej tą terminologię zauważmy, że możemy zapisać $X = \sum_{i,j=1}^m \left|e_i\right\rangle\!\left\langle e_j\right| \otimes X_{ij}$ gdzie $X_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ dla wszystkich $1 \leq i, j \leq m$. Wtedy X jest blokowo dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy następująca nierówność zachodzi dla wszystkich $\left|a\right\rangle \in \mathcal{H}_A$,

$|b\rangle \in \mathcal{H}_B$

$$((\langle a| \otimes \langle b|)X(|a\rangle \otimes |b\rangle) = \langle a| \left(\sum_{i,j=1}^{m} (\langle b| x_{ij} |b\rangle) |i\rangle\langle j| \right) |a\rangle \tag{2.55}$$

$$= \langle a| \begin{bmatrix} \langle b| x_{11} |b\rangle & \langle b| x_{12} |b\rangle & \cdots & \langle b| x_{1m} |b\rangle \\ \langle b| x_{21} |b\rangle & \langle b| x_{22} |b\rangle & \cdots & \langle b| x_{2m} |b\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b| x_{m1} |b\rangle & \langle b| x_{m2} |b\rangle & \cdots & \langle b| x_{mm} |b\rangle \end{bmatrix} |a\rangle \tag{2.56}$$

$$\geq 0 \tag{2.57}$$



Rysunek 2.5: Szkic hierarchii zawierania się zbiorów operatorów, po lewej z liczbą Schmidta od separowalnych, czyli z liczbą Schmidta 1 do dodatnio określonych. Po prawej stronie przedstawiono hierarchii zbiór operatorów od dodatnio określonych do blokowo dodatnich w $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$.

Dla ustalonego k niech BL_k oznacza zbiór wszystkich operatorów k-blokowo dodatnich. Można łatwo wykazać, że BL_k ma strukturę stożka właściwego w $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Ponadto, mamy następujący ciąg zawierań

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+ = BL_{\min\{m,n\}} \subset BL_{\min\{m,n\}-1} \subset \ldots \subset BL_2 \subset BL_1. \tag{2.58}$$

Pojęcie blokowej dodatniości operatorów można powiązać z liczbą Schmidta.

Stwierdzenie 2.21. *Niech $Z, W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ będą operatorami hermitowskimi oraz niech $W \geq 0$. Wtedy*

1. *Z jest k-blokowo dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Tr}(XV) \geq 0$ dla wszystkich $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+$ takich, że $SN(\sigma) \leq k$.*

2. *$SN(W) \leq k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Tr}(SW) \geq 0$ dla wszystkich operatorów k-blokowo dodatnich $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$.*

Warunek (1) wynika wprost z definicji k-blokowej dodatniości i liczby Schmidta, natomiast warunek (2) został dowiedziony w pracach [Stø08, SSZ09, Sko10].

Zauważmy, że wyniki zawarte w powyższym Stwierdzeniu można zapisać następująco: dla dowolnego k

$$S_k' = BL_k, \qquad BL_k' = S_k. \tag{2.59}$$

2.6 Macierz Choi odwzorowania liniowego

Niech $|\psi_+\rangle := \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{d}} |i\rangle \otimes |i\rangle$ będzie stanem maksymalnie splątanym w $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$. Niech $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ będzie odwzorowaniem liniowym. Definiujemy macierz Choi odwzorowania Φ jako operator $C_\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ określony wzorem

$$C_\Phi = d(\mathrm{id}_A \otimes \Phi)(|\psi_+\rangle\langle\psi_+|). \tag{2.60}$$

Przyporządkowanie $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_A), \mathcal{B}(H_B)) \ni \Phi \mapsto C_\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ jest izomorfizmem liniowym znanym jako *izomorfizm Jamiołkowskiego-Choi* [Jam72, Cho75a]. W łatwy sposób zauważyć, że izomorfizm Jamiołkowskiego-Choi jest liniowy, natomiast aby sprawdzić, że jest bijekcją zapiszmy C_Φ w postaci macierzy blokowej

$$C_\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(|1\rangle\langle 1|) & \Phi(|1\rangle\langle 2|) & \cdots & \Phi(|1\rangle\langle m|) \\ \Phi(|2\rangle\langle 1|) & \Phi(|2\rangle\langle 2|) & \cdots & \Phi(|2\rangle\langle m|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(|m\rangle\langle 1|) & \Phi(|m\rangle\langle 2|) & \cdots & \Phi(|m\rangle\langle m|) \end{bmatrix}. \tag{2.61}$$

Ponieważ zbiór $(|i\rangle\langle j|)_{i,j=1}^{m}$ jest bazą w $\mathbb{M}_m$ wynika stąd, że każde odwzorowanie Φ określa jednoznaczną macierz Choi i vice versa.

2.7 k-separowalność i k-splątanie

W mechanice kwantowej układ fizyczny opisany jest pewną przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}$. Stan układu opisany jest pewną macierzą gęstości ρ. Przypomnijmy, że *macierz gęstości* to operator $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, który spełnia warunki:

$$\rho \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\,\rho = 1. \tag{2.62}$$

Zbiór wszystkich macierzy gęstości na przestrzeni $\mathcal{H}$ oznaczamy $\mathcal{D}(\mathcal{H})$. Jest on zbiorem domkniętym i wypukłym. Punktami ekstremalnymi tego zbioru są tzw. *stany czyste*, dla których macierz gęstości jest projektorem jednowymiarowym: $\rho = |x\rangle\langle x|$ dla pewnego unormowanego wektora $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Z tego powodu czasami unormowane wektory też będziemy nazywać stanami czystymi. Obserwable w danym układzie opisywane są przez operatory hermitowskie $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{h}}$. Wartość obserwabli A w stanie ρ to liczba $\mathrm{Tr}(\rho A)$.

Interesują nas układy złożone z dwóch podukładów **A** i **B** opisanych przestrzeniami $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$. Przestrzeń Hilberta takiego układu jest iloczynem tensorowym $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Niech ρ będzie macierzą gęstości na $\mathcal{H}$. Z uwagi na wewnętrzną strukturę przestrzeni $\mathcal{H}$ możemy pytać, czy stan opisany operatorem ρ niesie w sobie jakieś korelacje między podukładami. Sytuację braku korelacji kwantowych opisuje pojęcie separowalności stanu. Mówimy, że stan ρ jest *separowalny*, jeśli istnieją macierze gęstości $\rho_i^A \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$ i $\rho_i^B \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$ oraz liczby $p_i \geq 0$ takie, że $\sum_i p_i = 1$, dla których mamy

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B.$$

Innymi słowy, stan ρ jest kombinacją wypukłą stanów produktowych. W przypadku stanu czystego $|v\rangle$ separowalność sprowadza się do warunku $|v\rangle = |v_A\rangle \otimes |v_B\rangle$ dla pewnych stanów czystych $|v_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ i $|v_B\rangle \in \mathcal{H}_B$. W przypadku, gdy stan ρ nie jest separowalny, mówimy, że jest *splątany*.

Nawiązując do części 2.4.3 zauważmy, że warunek separowalności stanu jest szczególnym przypadkiem warunku (2.48). Oznacza to, że

Stwierdzenie 2.22. *Stan ρ jest separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $SN(\rho) = 1$. Jeśli $|v\rangle$ jest stanem czystym, to jest on separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $SR(|v\rangle) = 1$.*

Rząd Schmidta możemy w pewnym sensie interpretować jako 'ilość splątania' jaka jest zawarta w stanie czystym. Stan czysty jest separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego rząd Schmidta jest równy 1 oraz $1 \leq SR(|v\rangle) \leq \min\{m,n\}$ dla wszystkich $|v\rangle \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$. W przypadku gdy, gdy $SR(|v\rangle) = \min\{m,n\}$ oraz wszystkie współczynniki Schmidta są równe $1/\sqrt{\min\{m,n\}}$ to stan $|v\rangle$ będziemy nazwali maksymalnie splątanym i oznaczali przez $|\psi_+\rangle$.

Niech $1 \leq k \leq \min\{m,n\}$. Motywując się powyższymi obserwacjami będziemy mówić, że stan ρ jest *k-separowalny*, gdy $SN(\rho) \leq k$ i *k-splątany*, gdy nie jest k-separowalny, tzn. $SN(\rho) > k$.

Widać, że rozkład Schmidta może stanowić jedno z narzędzi do badania stanów kwantowych [NC10]. Szczególnym zastosowaniem jest zdefiniowanie normy przy pomocy liczby Schmidta która może posłużyć do badania dwóch fundamentalnych problemów w kwantowej teorii informacji, mianowicie klasyfikację odwzorowań k-dodatnich jako świadków splątania oraz problem istnienia stanów NPT wykazujących tak zwane splątanie związane (ang. *Bound entanglement*).

Rodzinę norm o której wspomnieliśmy, zdefiniowana jest następująco. Jeśli $1 \leq k \leq \min\{m,n\}$, to

$$\|v\|_{s(k)} := \sup_{|w\rangle}\{|\langle w|v\rangle| : SR(|w\rangle) \leq k\}, \qquad |v\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \tag{2.63}$$

Norma ta ma ciekawą interpretację geometryczną, ponieważ można o niej myśleć jak o pewnej mierze, która mówi jak blisko dany stan kwantowy jest do stanu kwantowego, który ma rząd Schmidta nie większy niż k. Idąc dalej, możemy zdefiniować normę na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ determinowaną przez rozkład Schmidta. Niech $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ i $1 \leq k \leq$

$\min\{m,n\}$, Definiujemy k-tą normę operatorową dla operatora X jako

$$\|X\|_{S(k)} := \sum_{|v\rangle,|w\rangle} \{ | \langle w| X |v\rangle | : SR(|v\rangle), SR(|w\rangle) \leq k \}. \tag{2.64}$$

O tej normie również możemy myśleć jako o mierze odległości pewnego stanu ρ od stanu z liczbą Schmidta nie większą niż k. Co więcej dla operatorów dodatnich normę tą można przepisać [JK10] w następujący sposób, dla operatora $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^+$ mamy

$$\|X\|_{S(k)} = \sup_{|v\rangle} \{ \langle v| X |v\rangle : SR(|v\rangle) \leq k \} \tag{2.65}$$

$$= \sup_{\rho} \{ \mathrm{Tr}(X\rho) : SN(\rho) \leq k \}. \tag{2.66}$$

Do badania k-splątania również możemy używać liczby Schmidta dla macierzy gęstości. Poniżej przedstawiamy stwierdzenie łączące liczbę Schmidta k z k-blokową dodatniością.

Stwierdzenie 2.23. *Niech $\rho \in \mathbb{M}_A \otimes \mathbb{M}_b$ będzie macierzą gęstości. Wtedy $SN(\rho) \leq k$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje operator separowalny $X \in (\mathbb{M}_{A'} \otimes \mathbb{M}_A) \otimes (\mathbb{M}_{B'} \otimes \mathbb{M}_B)$ dla których $\dim(\mathbb{C}^{A'}), \dim(\mathbb{C}^{B'}) \leq k$, takich, że $(\langle \psi_+|_{A'B'} \otimes \mathbb{1}_{AB}) X (|\psi_+\rangle_{A'B'} \otimes \mathbb{1}_{AB}) = \rho$.*

Dowód. Załóżmy, że $X = \sum_l p_l |a_l\rangle\langle a_l| \otimes |b_l\rangle\langle b_l|$, gdzie

$$|a_l\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{l,i} |i\rangle \otimes |a_{l,i}\rangle \in \mathbb{C}^{A'} \otimes \mathbb{C}^{A} \quad \text{i} \quad |b_l\rangle = \sum_{i=1}^{k} \beta_{l,i} |i\rangle \otimes |b_{l,i}\rangle \in \mathbb{C}^{B'} \otimes \mathbb{C}^{B}. \tag{2.67}$$

Wtedy

$$(\langle \psi_+|_{A'B'} \otimes \mathbb{1}_{AB}) X (|\psi_+\rangle_{A'B'} \otimes \mathbb{1}_{AB}) \tag{2.68}$$

$$= \sum_l (\langle \psi_+| \otimes \mathbb{1}) \left[\sum_{i,j,r,s=1}^{k} \alpha_{l,i}\alpha_{l,j}\beta_{l,r}\beta_{l,s} |ir\rangle\langle js| \otimes |a_{l,i}b_{l,r}\rangle\langle a_{l,j}b_{l,s}| \right] (|\psi_+\rangle \otimes \mathbb{1}) \tag{2.69}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_l \sum_{l,j=1}^{k} \alpha_{l,i}\alpha_{l,j}\beta_{l,i}\beta_{l,j} |a_{l,i}b_{l,i}\rangle\langle a_{l,j}b_{l,j}| \tag{2.70}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_l \left(\alpha_{l,i}\beta_{l,i} |a_{l,i}b_{l,i}\rangle \right) \left(\alpha_{l,j}\beta_{l,j} \langle a_{l,j}b_{l,j}| \right), \tag{2.71}$$

który posiada liczbę Schmidta nie większą niż k. W drugą stronę, wystarczy zobaczyć, że każdy operator z liczbą Schmidta co najwyżej k może zostać zapisany w postaci takiej jak powyżej. ■

2.7.1 Świadek k-splątania

Następujące twierdzenie podaje charakteryzacje geometryczną dla określenia czy stan $\rho \in \mathcal{D}$ jest zawarty w pewnym podzbiorze wypukłym $C \subset \mathcal{D}$.

Twierdzenie 2.24. *Niech $C \subset \mathcal{D}$ będzie zbiorem wypukłym stanów na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wtedy dla każdego $\rho \notin C$ istnieje operator hermitowski $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ taki, że*

$$\mathrm{Tr}(A\rho) < 0 \quad \textit{oraz} \quad \mathrm{Tr}(A\sigma) \geq 0, \quad \sigma \in C \tag{2.72}$$

Twierdzenie to jest konsekwencją twierdzeń z analizy funkcjonalnej [Lax14, Roc70]. Twierdzenie Hahna-Banacha mówi, że zbiór wypukły oraz pewien punkt który znajduje się poza tym zbiorem może zostać odseparowany hiperpłaszczyzną W. Dodatkowo korzystając z teorii reprezentacji Riesza-Frechta można scharakteryzować tą hiperpłaszczyznę. Taką hiperpłaszczyznę często się nazywa *świadkiem* [Ter01] jako, że wskazuje na stan który znajduje się poza zbiorem C.

Twierdzenie 2.25 (Horodeccy [HHH96])**.** *Stan $\rho \in \mathcal{D}$ jest separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Tr}\{\rho W\} \geq 0$ *dla wszystkich operatorów hermitowskich W takich, że*

$$\mathrm{Tr}\Big([|\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|] W \Big) \geq 0, \tag{2.73}$$

dla $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ i $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$. Operator W często jest nazywany świadkiem splątania.

Operator W będziemy nazywali świadkiem splątania [HHH96, Ter00] jeśli spełnia $W \ngeq 0$ oraz $\mathrm{Tr}(\sigma W) \geq 0$ dla wszystkich $\rho \in \mathcal{S}$, gdzie $\mathcal{S}$ to zbiór stanów separowalnych.

Twierdzenie 2.26. *Stan $\rho \in \mathcal{D}$ jest stanem splątanym, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje świadek splątania W taki, że*

$$\mathrm{Tr}(\rho W) < 0. \tag{2.74}$$

Zauważmy, że jeden świadek splątania może wykrywać splątanie wielu stanów w związku z czym, jeden stan splątany może być wykrywany przez wielu świadków splątania.

Przykład 2.27. Rozważmy operator zaproponowany w [HHH96], zwany w literaturze jako operator *Flip* oznaczany jako F który ma zdefiniowane działanie na wektorach stanów jako $F(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) = |\psi_B\rangle \otimes |\psi_A\rangle$ lub w działaniu na bazę $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}$ w $\mathcal{H}$

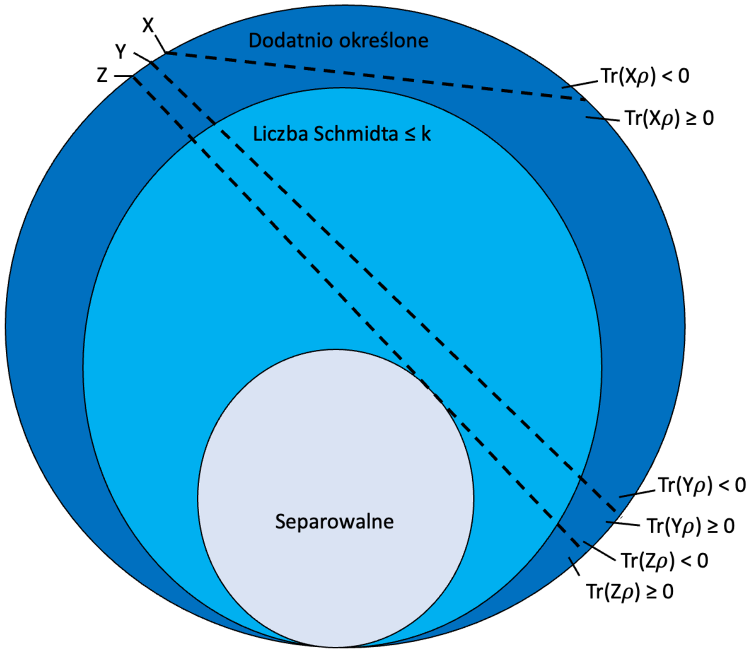
$$F = \sum_{ij=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes |j\rangle\langle i| \,. \tag{2.75}$$

Bez trudu można sprawdzić, że ten operator jest dodatnio określony na stanach produktowych. Operator takiej zamiany jest świadkiem splątania ponieważ operator F ma ujemną wartość własną i wykrywa co najmniej $|\psi_-\rangle$.

Przykład 2.28. Rozważmy świadka, postaci

$$W_R = \mathbb{1} - dP_+, \tag{2.76}$$

gdzie $P_+ = |\psi_+\rangle\langle\psi_+|$ jest to projektor na maksymalnie splątany stan $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |i\rangle \otimes |i\rangle$. Ponieważ maksymalne przykrycie stanu separowalnego z P_+ wynosi $1/d$ oraz W posiada ujemną wartość własną, jest świadkiem splątania, który wykrywa co najmniej $|\psi_+\rangle$.



Rysunek 2.6: Reprezentacja świadka splątania jako hiperpłaszczyzny separującej opisanej w Propozycji (2.21). Każdy operator który jest powyżej hiperpłaszczyzny separującej posiada splątanie które jest wykrywane przez odpowiadającego mu świadka splątania. Operator Y reprezentuje ogólnego świadka splątania, X odpowiada k-splątany świadek oraz Z jest optymalnym świadkiem splątania.

Pojęcie blokowej dodatniości operatorów można powiązać z liczbą Schmidta. Zbiór operatorów z liczbą Schmidta nie większy niż k jest domknięty i stanowi zbiór wypukły. Twierdzenie o hiperpłaszczyźnie separującej mówi, że muszą istnieć operatory σ, X (jako σ rozumiemy stany więc muszą być dodatnie) takie, że $\mathrm{Tr}(X\rho) \geq 0$ dla wszystkich ρ takie, że $SN(\rho) \leq k$ ale i $\mathrm{Tr}(X\sigma) < 0$. W rzeczy samej, twierdzenie o oddzielającej hiperpłaszczyźnie X mówi o operatorach które są k-blokowo dodatnie i nie dodatnio określonych. Takie operatory nazywa się *k-splątanymi świadkami splątania* lub dla przypadku gdy $k = 1$ po prostu *świadkami splątania*

Podsumowując, hermitowski operator W nazywamy k-splątanym świadkiem splątania gdy

1. $\mathrm{Tr}(W\sigma) \geq 0$ dla wszystkich $\sigma \in \mathcal{S}_{k-1}$,
2. Istnieje $\rho \in \mathcal{S}_k$ takim że $\mathrm{Tr}(W\rho) < 0$.

Przykład 2.29. Niech $P^+ = |\psi_+\rangle\langle\psi_+|$ będzie stanem maksymalnie splątanym działającym na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, oraz zdefiniujmy nieunormowany stan izotropowy [HH99]

$$\rho_\beta = \mathbb{1} + \beta P^+, \tag{2.77}$$

dla $-1 \leq \beta \leq \infty$. Stan izotropowy ρ_β posiada liczbę Schmidta równą n wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{d((n-1)d-1)}{d-(n-1)} < \beta \leq \frac{d(nd-1)}{d-1}. \tag{2.78}$$

Wtedy operator

$$W_n = \mathbb{1} - \frac{d}{n-1} P^+, \tag{2.79}$$

jest n-świadkiem splątania dla stanu ρ_β.

Rozdział 3

Klasy odwzorowań dodatnich

Odwzorowania dodatnie i całkowicie dodatnie są ważnym obiektem badań zarówno z punktu widzenia matematyki jak i fizyki matematycznej [Lin75, KMSZ17, Osa91, Pau03, HLP$^+$13, Pas21, SS05, Stø63, TT88]. Struktura odwzorowań całkowicie dodatnich jest dobrze rozumiana oraz łatwo można zweryfikować całkowitą dodatniość przez zbadanie macierzy Choi [Cho75a]. Natomiast dla odwzorowań dodatnich które są nierozkładalne czyli nie są sumą odwzorowań całkowicie dodatnich i całkowicie kododatnich [ZC13, Maj12, TT88] wiedza jest dużo uboższa.

3.1 Definicje i podstawowe własności

Niech $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami Hilberta. Odwzorowanie liniowe $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ nazywamy *dodatnim* jeśli $\Phi(\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)^+) \subseteq B(\mathcal{H}_B)^+$.

Przykład 3.1. Przykłady odwzorowań dodatnich

1. $\Phi(X) = \operatorname{Tr} X$ jest dodatnim liniowym funkcjonałem; $\Phi(X) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} X$ jest dodatni i zachowuje jedynkę.

2. Funkcjonał liniowy działający na $\mathbb{M}_n$ który ma postać $\Phi(X) = \operatorname{Tr}(AX)$ dla $A \in \mathbb{M}_n$ będącą macierzą dodatnio określoną.

3. Odwzorowanie $\Phi(X) = \frac{\operatorname{Tr} X}{n} \mathbb{1}$ jest dodatnie.

4. Niech X^T oznacza transpozycję macierzy X. Wtedy odwzorowanie $\Phi(X) = X^T$ jest dodatnie.

5. Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$. Wtedy $\Phi(X) = A^\dagger X A$ jest odwzorowaniem dodatnim z $\mathbb{M}_m$ do $\mathbb{M}_n$.

6. Każda kombinacja liniowa odwzorowań dodatnich będzie odwzorowaniem dodatnim.

Niech $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że odwzorowanie Φ jest *k-dodatnie*, gdy odwzorowanie rozszerzone

$$\Phi^{(k)} = \mathrm{id}_k \otimes \Phi : \mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathbb{M}_k \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_B). \tag{3.1}$$

Mówimy, że odwzorowanie jest *całkowicie dodatnie* jeśli jest k-dodatnie dla każdego k.

Stwierdzenie 3.2. *Niech $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie odwzorowaniem liniowym. Następujące warunki są równoważne*

1. *Φ jest k-dodatnie.*
2. *$(\mathrm{id}_k \otimes \Phi)(P)$ jest dodatnie dla wszystkich projektorów $P \in \mathbb{M}_k(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ rzędu 1.*
3. *Dla dowolnego zbioru ortonormalnego $X = \{|x_1\rangle, \dots |x_k\rangle\} \subseteq \mathcal{H}$, operator zdefiniowany jako $\Phi_X = (\Phi(|x_i\rangle\langle x_j|))_{1\le i,j\le k}$ jest dodatni.*

Twierdzenie 3.3. *Niech $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ oraz $1 \le k \le \min\{d_A, d_B\}$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. *Φ jest k-dodatnie.*
2. *$\langle x| C_\Phi |x\rangle \ge 0$ dla wszystkich $|x\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ takich, że $SR(|x\rangle) \le k$.*
3. *$(\mathbb{1}_A \otimes P)C_\Phi(\mathbb{1}_A \otimes P)$ jest dodatnio określone dla każdego k-wymiarowego projektora $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$.*

Dowód. 1. $\iff$ 2.: Dla przypadku gdy $k > 1$ niech f_i będzie bazą w $\mathbb{C}^k$, wtedy

$$C_{\mathrm{id}_k\otimes\Phi} = \sum_{l,p=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n}(|f_l\rangle\langle f_p| \otimes |e_i\rangle\langle e_j|) \otimes (|f_l\rangle\langle f_p| \otimes \phi(|e_i\rangle\langle e_j|)). \tag{3.2}$$

Wprowadźmy wektor $|\xi\rangle \in \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{H}_A$ oraz odpowiednio wektor $|\zeta\rangle \in \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{H}_B$, mają one postać

$$|\xi\rangle = \sum_{s=1}^{k}|f_s\rangle \otimes |x_s\rangle \qquad |\zeta\rangle = \sum_{q=1}^{k}|f_q\rangle \otimes |y_q\rangle. \tag{3.3}$$

Aplikując (3.2) i (3.3) do $\mathrm{id}_k \otimes \Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_k) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_k) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_k \otimes \Phi \ge 0 \quad &\iff \quad (\langle\xi| \otimes \langle\zeta|)C_{\mathrm{id}_k\otimes\Phi}(|\xi\rangle \otimes |\zeta\rangle) \ge 0 \text{ dla wszystkich } |\xi\rangle \in \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{H}_A \\
&\qquad \text{oraz } |\zeta\rangle \in \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{H}_B \\
&\iff \left(\sum_{s,q=1}^{k}\langle f_s|\langle x_s|\langle f_q|\langle y_q|\right)\left(\sum_{l,p=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n}|f_l\rangle\langle f_p| \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_l\rangle\langle f_p| \otimes \Phi(|e_i\rangle\langle e_j|\right) \\
&\qquad \left(\sum_{s',q'=1}^{k}\langle f'_s|\langle x'_s|\langle f'_q|\langle y'_q|\right) \ge 0 \text{ dla wszystkich } |x_s\rangle \in \mathbb{C}^n \text{ oraz } |y_q\rangle \in \mathcal{H}_A \\
&\iff \left(\sum_{l=1}^{k}\langle x_l|\langle y_l|\right)(\sum_{i,j=1}^{n}|e_i\rangle\langle e_j| \otimes \Phi(|e_i\rangle\langle e_j|))(\sum_{p=1}^{k}|x_p\rangle|y_p\rangle) \ge 0 \\
&\qquad \text{dla wszystkich } |x_l\rangle \in \mathcal{H}_A \text{ oraz } |y_l\rangle \in \mathcal{H}_B \\
&\iff \langle z|C_\Phi z\rangle \ge 0 \text{ dla wszystkich } |z\rangle = \sum_{l=1}^{k}|x_l\rangle|y_l\rangle \text{ gdzie } |x_l\rangle|y_l\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.
\end{aligned}$$

2. $\iff$ 3.: Załóżmy, że prawdziwy jest punkt 3. Niech dany jest wektor postaci $|z\rangle = \sum_{l=1}^{k} |x_l\rangle \otimes |y_l\rangle$ gdzie $|x_l\rangle \in \mathcal{H}_A$ oraz $|y_l\rangle \in \mathcal{H}_B$, oraz niech P będzie ortogonalnym projektorem rzutującym na podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $|y_l\rangle$, wtedy $(\mathbb{1}_k \otimes P)|y\rangle = |y\rangle$. Zauważmy wtedy, że

$$\langle z|C_\Phi z\rangle = (\langle z(\mathbb{1}_k \otimes P)|C_\Phi(\mathbb{1}_k \otimes P)z\rangle = \langle z|(\mathbb{1}_k \otimes P)C_\Phi(\mathbb{1}_k \otimes P)z\rangle \geq 0. \tag{3.4}$$

Teraz załóżmy odwrotnie, niech prawdziwy jest punkt 2. Niech P będzie ortogonalnym projektorem w $\mathcal{H}_B$, gdzie $\mathrm{Tr}(P) = k$ oraz niech $|x_l\rangle$ będzie bazą ortonormalną o wymiarze k. Dla każdego wektora $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ istnieje taki wektor $|x_l\rangle \in \mathcal{H}_A$ taki, że $(\mathbb{1}_n \otimes P)|\chi\rangle = \sum_{l=1}^{k} |x_l\rangle \otimes |y_l\rangle$. Wtedy mamy, że

$$\langle\chi|(\mathbb{1}_n \otimes P)C_\Phi(\mathbb{1}_n \otimes P)|\chi\rangle = \left(\sum_{l=1}^{l} \langle x_l|\langle y_l|\right) C_\Phi \left(\sum_{l=1}^{l} |x_l\rangle|y_l\rangle\right) \geq 0. \tag{3.5}$$

Ponieważ $(\mathbb{1}_n \otimes P)C_\Phi(\mathbb{1}_n \otimes P) \geq 0$. ■

Stwierdzenie 3.4. *Jeśli odwzorowanie $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ jest $(k+1)$-dodatnie, to jest k-dodatnie.*

Warto dodatkowo zauważyć, że jeśli odwzorowanie Φ jest k-dodatnie dla $k = \min\{\dim(\mathcal{H}_A), \dim(\mathcal{H}_A)\}$ to implikuje to, że odwzorowanie jest całkowicie dodatnie [Cho75a].

Dla $k \in \mathbb{N}$, niech $\mathcal{P}_k(A,B)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań k-dodatnich działających z $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ w $\mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$. Zbiór $\mathcal{P}_k(A,B)$ jest stożkiem właściwym w $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_A), \mathcal{B}(\mathcal{H}_B))$. Niech $\mathcal{P}_\infty(A,B)$ oznacza zbiór odwzorowań całkowicie dodatnich, czyli

$$\mathcal{P}_\infty(A,B) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k(A,B).$$

Mamy następujący ciąg zawierań

$$\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}_{\min\{m,n\}} \subset \mathcal{P}_{\min\{m,n\}-1} \subset \ldots \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1. \tag{3.6}$$

W zbiorze odwzorowań dodatnich będą nas jeszcze interesowały odwzorowania kododatnie. Dla $k \in \mathbb{N}$, mówimy, że odwzorowanie $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ jest *k-kododatnie* jeśli odwzorowanie rozszerzone

$$\Phi_{(k)} = \Phi \otimes T_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathbb{M}_k \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B) \otimes \mathbb{M}_k \tag{3.7}$$

jest dodatnie, gdzie T_k jest odwzorowaniem transpozycji działającej na algebrze macierzowej $\mathbb{M}_k$. Jeśli odwzorowanie jest k-kododatnie dla każdego k to mówimy, że *całkowicie kododatnie*.

Przykład 3.5. Rozważmy odwzorowanie transpozycji $T_n : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$. Pokażemy, że jest ono k-kododatnie dla dowolnej liczby naturalnej k.

$$(T_n)_{(k)} = T_n \otimes T_k : \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_k \to \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_k, \tag{3.8}$$

gdzie używając naturalnego izomorfizmu możemy dokonać następującego utożsamienia, że $T_n \otimes T_k = T_{nk}$ oraz $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_k \simeq \mathbb{M}_{nk}$. Ponieważ transpozycja T_{nk} jest odwzorowaniem dodatnim, wnioskujemy, że $(T_n)_{(k)}$ jest dodatnie.

Kolejną interesującą nas klasą odwzorowań dodatnich będą odwzorowania rozkładalne. Odwzorowanie Φ nazywamy *rozkładalnym*, jeśli można je przedstawić w postaci

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{3.9}$$

gdzie Φ_1 jest odwzorowaniem całkowicie dodatnim, a Φ_2 jest odwzorowaniem całkowicie kododatnim.

Wiadomo, że każde odwzorowanie dodatnie $\Phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ dla $m = 2$ i $n \in \{2, 3\}$ jest odwzorowaniem rozkładalnym [Stø63, Wor76a].

Przykład 3.6. Pierwszym podanym przykładem odwzorowania nierozkładalnego było odwzorowanie Choi $\Phi_C : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_3$ [Cho75b] postaci

$$\Phi_C(X) = \begin{bmatrix} x_{11} + \mu x_{33} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & x_{22} + \mu x_{11} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{33} + \mu x_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

dla $X = (x_{ij}) \in \mathbb{M}_3$ oraz parametru $\mu \geq 1$. Choi pokazał, że jest ono dodatnie, nierozkładalne i ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich.

Przykład 3.7. Rozważmy uogólnione odwzorowanie Choi zdefiniowane w [CKL92],

$$\Phi_{[a,b,c]}(X) = \begin{bmatrix} (a-1)x_{11} + bx_{22} + cx_{33} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & cx_{11} + (a-1)x_{22} + bx_{33} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & bx_{11} + cx_{22} + (a-1)x_{33} \end{bmatrix},$$

dla $X = (x_{ij}) \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^3)$, gdzie $a, b, c \geq 0$. Odwzorowanie $\Phi_{[a,b,c]}$ jest 2-dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geq 2$ lub $[1 \leq a < 2] \wedge [bc \geq (2-a)(b+c)$. W pracy [YLT16] używając definicji tzw. trivial liftingu autorzy pokazali, że odwzorowanie to jest rozkładalne o następującym rozkładzie

$$\Phi_{[a,b,c]}(X) = \begin{bmatrix} ax_{11} + bx_{22} + cx_{33} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & cx_{11} + ax_{22} & -(\frac{2}{a} - a)x_{23} \\ -x_{31} & (\frac{2}{a} - a)x_{32} & bx_{11} + ax_{33} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & bx_{33} & (a - 1 - \frac{2}{a})x_{23} \\ 0 & (a - 1 - \frac{2}{a})x_{32} & cx_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

Co więcej, w pracy [CKL92, Twierdzenie 3.4] pokazano używając innych metody następujący rozkład

$$\Phi_{[a,b,c]} = (1 - \sqrt{bc})\Phi_{[\frac{a-\sqrt{bc}}{1-\sqrt{bc}},0,0]} + \sqrt{bc}\Phi_{[1,\sqrt{\frac{b}{c}},\sqrt{\frac{c}{b}}]}. \tag{3.13}$$

Wynika z tego, że rozkład odwzorowania 2-dodatniego $\Phi_{[a,b,c]}$ nie jest jednoznaczny.

Przykład 3.8. Rozważmy uogólnione odwzorowanie Choi z przykładu 3.7 $\Phi_{[a_1,a_2,a_3]}$: $\mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_3$, z trzema parametrami $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ zdefiniowane jako

$$\Phi_{[a_1,a_2,a_3]}(X) = diag\left(\sum_{i=1}^{3} a_i x_{i+j,i+j}\right)_{j=0,1,2} - X, \tag{3.14}$$

dla $X = (x_{ij}) \in \mathbb{M}_3$.

1. Odwzorowanie $\Phi_{[a_1,a_2,a_3]}$ jest odwzorowaniem dodatnim ale nie całkowicie dodatnim jeśli zachodzą następujące warunki [CKL92]
   (a) $a_1 \geq 1$,
   (b) $a_1 + a_2 + a_3 \geq 3$,
   (c) $a_2 a_3 \geq (1 - a_1)^2 \quad$ jeśli, $\quad 1 \leq a_1 \leq 2$.
2. Odwzorowanie dla $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ jest to przykład pierwszego odwzorowania 2-dodatniego które nie jest całkowicie dodatnie [Cho80].
3. Odwzorowanie dla $\Phi_{[2,0,\mu]}$, dla $\mu \geq 1$ jest dodatnie oraz nierozkładalne [CL77, Stø82].
4. Dla $\Phi_{[2,0,1]}$ jest atomowe (ang. *atom*) [TT88] czyli nie można go przedstawić w postaci sumy odwzorowań 2-dodatniego i 2-kododatniego.
5. Odwzorowanie to jest całkowicie dodatnie dla $a_1 \geq 3$.

Ciekawym zagadnieniem jest pytanie, czy k-dodatniość dla większych k dopuszcza nierozkładalność. W wyższych wymiarach, czyli takich dla których $m, n \geq 10$ w pracy [HLLMH18] pokazano, że istnieją odwzorowania 2-dodatnie które są nierozkładalne.

Twierdzenie 3.9. *Niech $k, m, n \in \mathbb{N}$, gdzie $k \geq 2$. Jeśli odwzorowanie liniowe $\phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ jest k-dodatnie i nie jest całkowicie dodatnie, to odwzorowanie rozszerzone $\phi^{(k)} = \phi \otimes \mathrm{id}_k$ jest nierozkładalne.*

Stwierdzenie 3.10. *Istnieje odwzorowanie* 2*-dodatnie nierozkładalne* $\mathbb{M}_{10} \to \mathbb{M}_{10}$.

Dowód. Niech $\psi : \mathbb{M}_5 \to \mathbb{M}_5$ będzie odwzorowaniem 4-dodatnim, które nie jest całkowicie dodatnie. Jako przykład takiego odwzorowania rozważmy odwzorowania następującej postaci

$$\psi(X) = 4\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1} - X, \tag{3.15}$$

dla $X \in \mathbb{M}_5$. Ponieważ ψ jest oczywiście 2-dodatnie, to z Twierdzenia 3.9 wynika, że odwzorowanie

$$\phi = \psi^{(2)} = \psi \otimes \mathrm{id}_2 : \mathbb{M}_5 \otimes \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_5 \otimes \mathbb{M}_2, \tag{3.16}$$

nie jest rozkładalne. Zauważmy także, że ϕ jest 2-dodatnie, bowiem dodatniość odwzorowania

$$\phi^{(2)} = \phi \otimes \mathrm{id}_2 = \psi \otimes \mathrm{id}_2 \otimes \mathrm{id}_2 = \psi \otimes \mathrm{id}_4, \tag{3.17}$$

wynika z 4-dodatniości odwzorowania ψ. ■

W wyższych wymiarach znane są jedynie częściowe wyniki [BFP04, CK09, Hou10, Maj12, MM01, Ter98, TT83, Tom85] ale struktura zbioru odwzorowań dodatnich dalej nie jest dobrze zrozumiana.

3.2 Odwzorowania całkowicie dodatnie. Twierdzenie Choi i konsekwencje

Następująca charakteryzacja odwzorowań całkowicie dodatnich [Cho75a, Kra71] stanowi jeden z fundamentów kwantowej teorii informacji.

Twierdzenie 3.11. *Niech* $\Phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ *będzie odwzorowaniem liniowym oraz rozważmy stan czysty* $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m |i\rangle \otimes |i\rangle$. *Następujące warunki są równoważne*

1. Φ *jest całkowicie dodatnie;*
2. Φ *jest m-dodatnie;*
3. *operator* $C_\Phi = m(\mathrm{id}_m \otimes \Phi)(|\psi_+\rangle\langle\psi_+|)$ *jest dodatnio określony;*
4. *istnieją operatory* $(A_k)_{k=1}^{mn}$ *takie, że* $\Phi(X) = \sum_{k=1}^{mn} A_k X A_k^\dagger$.

Dowód. Implikacje (4)$\Rightarrow$(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) w jasny sposób wynikają z definicji całkowitej dodatniości, nietrywialne przejście jest tylko, że (3) $\Rightarrow$ (4) co udowodnimy.

Ponieważ operator C_Φ jest dodatnio określony, wykorzystajmy twierdzenie o rozkładzie spektralnym

$$C_\Phi = \sum_{k=1}^{mn} \lambda_k |v_k\rangle\langle v_k| \,. \tag{3.18}$$

Możemy zapisać każdy element bazy $|v_k\rangle$ jako liniową kombinację jako element z produktu tensorowego $|v_k\rangle = \sum_{j=1}^m c_{kj} |j\rangle \otimes |v_{kj}\rangle$. Mnożąc C_Φ z lewej strony przez $\langle i| \otimes \mathbb{1}$ oraz z prawej strony przez $|j\rangle \otimes \mathbb{1}$ (nadużywając nieco notacji) dostajemy, że

$$(\langle i| \otimes \mathbb{1})C_\Phi(|j\rangle \otimes \mathbb{1}) = \Phi(|i\rangle\langle j|). \tag{3.19}$$

Z drugiej strony z równania (3.18) widzimy

$$(\langle i| \otimes \mathbb{1})C_\Phi(|j\rangle \otimes \mathbb{1}) = \sum_{k=1}^{mn} \lambda_k c_{ki} \overline{c_{kj}} |v_{ki}\rangle\langle v_{kj}| \tag{3.20}$$

$$= \sum_{k=1}^{mn} \lambda_k \left(\sum_{l=1}^{m} c_{kl} |v_{kl}\rangle\langle l| \right) |i\rangle\langle j| \left(\sum_{l=1}^{m} \overline{c_{kl}} |k\rangle\langle v_{kl}| \right). \tag{3.21}$$

Definiując $A_k := \sqrt{\lambda_k} \sum_{l=1}^m c_{kl} |v_{kl}\rangle\langle l|$ dostajemy z równości równań (3.21) i (3.19), że $\Phi(|i\rangle\langle j|) = \sum_{k=1}^{mn} A_k |i\rangle\langle j| A_k^\dagger$. Ponieważ odwzorowanie Φ jest liniowe to rozszerzając je dostajemy, że $\Phi(X) = \sum_{k=1}^{mn} A_k X A_k^\dagger$ dla wszystkich $X \in \mathbb{M}_m$, co kończy dowód. ■

Dowód twierdzenia (3.11) pokazuje jak konstruować rodzinę operatorów Krausa którą można zbudować z wektorów własnych operatora C_Φ. Jest to kanoniczna postać operatorów Krausa, zauważmy że taki wybór gwarantuje nam, że są one ortogonalne względem siebie w iloczynie Hilberta-Schmidta, czyli $\operatorname{Tr}\Big(A_i A_j^\dagger\Big) = 0$ jeśli $i \neq j$. Dodatkowo z warunku (4) możemy wywnioskować, że punkty ekstremalne zbioru wypukłego odwzorowań całkowicie dodatnich stanowią samosprzężone odwzorowania. Ponieważ odwzorowania samosprzężone to takie odwzorowania które Φ dla których $\operatorname{rank}(C_\Phi) \leq 1$. Odwzorowanie zerowe i o rzędzie jeden są dodatnie i stanowią punkty ekstremalne w zbiorze operatorów dodatnio określonych w związku z czym odwzorowania samosprzężone stanowią punkty ekstremalne w zbiorze odwzorowań całkowicie dodatnich.

Dodatkowo odwzorowanie Φ jest całkowicie dodatnie z operatorami Krausa $\{A_k\}_{k=1}^{mn}$ zachowuje ślad (czyli jest kanałem kwantowym) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr}\Big(\Phi(X)\Big) = \operatorname{Tr}\left(\sum_{k=1}^{mn} A_k X A_k^\dagger\right) = \operatorname{Tr}\left(X \sum_{k=1}^{mn} A_k^\dagger A_k\right), \tag{3.22}$$

dla wszystkich $X \in \mathbb{M}_m$. Odwzorowanie Φ zachowuje ślad wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{k=1}^{mn} A_k^\dagger A_k = \mathbb{1}$. Z drugiej strony warunek $\sum_{k=1}^{mn} A_k^\dagger A_k = \mathbb{1}$ oznacza, że odwzorowanie Φ zachowuje jedynkę (ang. *unital*), czyli $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Odwzorowania zachowujące ślad oraz zachowujące jedynkę są dualne względem siebie w takim sensie, że Φ zachowuje ślad wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi^\dagger$ zachowuje jedynkę i vice-versa.

Przykład 3.12. Niech $T : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$ będzie odwzorowaniem transpozycji wymiaru 2×2. Widzimy, że wartości własne dowolnego $X \in \mathbb{M}_2$ są dokładnie takie same jak wartości własne $T(X)$, w związku z czym odwzorowanie T jest dodatnie. Aby określić czy odwzorowanie T jest całkowicie dodatnie użyjemy warunku (3) z Twierdzenia (3.11)

$$2(\mathrm{id}_2 \otimes T)(|\psi_+\rangle\langle\psi_+|) = (\mathbb{1} \otimes T)\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right], \tag{3.23}$$

nie jest dodatnio określone, ponieważ posiada jedną ujemną wartość własną. Wynika stąd, że odwzorowanie T nie jest całkowicie dodatnie. Rozważając ten przykład w wyższych wymiarach możemy zauważyć, że odwzorowanie transpozycji nie jest 2-dodatnie.

Przykład 3.13. Zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ z działaniem $\Phi(X) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X)\mathbb{1}$. Zauważmy, że to odwzorowanie zachowuje ślad ponieważ $\operatorname{Tr}(\Phi(X)) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X)\operatorname{Tr}(\mathbb{1}) = \operatorname{Tr} X$. Natomiast żeby zobaczyć, że jest całkowicie dodatnie policzmy macierz Choi tego odwzorowania

$$C_\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} |i\rangle\langle j| \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| \otimes \mathbb{1} = \frac{1}{n}\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \geq 0. \tag{3.24}$$

Przykład 3.14. Niech $n \geq 2$. Rozważmy odwzorowanie transpozycji $T : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$. Pokażemy, że macierz Choi C_T jest blokowo dodatnia mimo, że odwzorowanie transpozycji nie jest całkowicie dodatnie, czyli macierz Choi nie jest dodatnio określona.

$$(\langle a| \otimes \langle b|)C_T(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (\langle a| \otimes \langle b|)\left(\sum_{i,j=1}^{n} |i\rangle\langle j| \otimes |j\rangle\langle i|\right)(|a\rangle \otimes |b\rangle) \tag{3.25}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle a|i\rangle \langle j|a\rangle \langle b|j\rangle \langle i|b\rangle \tag{3.26}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle a|i\rangle \langle i|b\rangle \sum_{j=1}^{n} \langle b|j\rangle \langle j|a\rangle \tag{3.27}$$

$$= \|\langle a|b\rangle\|^2 \tag{3.28}$$

$$\geq 0, \tag{3.29}$$

dla dowolnych $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^n$. Z faktu, że odwzorowanie transpozycji jest dodatnie wynika wprost, że macierz Choi musi być blokowo dodatnia.

Odwzorowanie Φ z Przykładu (3.13) jest całkowicie dodatnie, oznacza to, że musi ono posiadać rozkład związany z pewną rodziną operatorów Krausa. Jedną z rodzin operatorów to zbiór $\{\frac{1}{\sqrt{n}} |i\rangle\langle j|\}_{i,j=1}^{n}$ na którą możemy patrzeć następująco

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} |i\rangle\langle j|\, X\, |i\rangle\langle j| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| \sum_{j=1}^{n} \langle j|\, X\, |j\rangle = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X)\mathbb{1} = \Phi(X), \tag{3.30}$$

dla wszystkich $X \in \mathbb{M}_n$. Aby pokazać, że rozkład operatorów Krausa nie jest jednoznaczny pokażemy, że $\{\frac{1}{\sqrt{n}} A_k\}_{k=1}^{n^2}$ jest również pewną rodziną operatorów Krausa dla odwzorowania Φ gdy $\{A_k\}_{k=1}^{n^2}$ jest rodziną macierzy która tworzy bazę ortonormalną w $\mathbb{M}_n$ względem produktu Hilberta-Schmidta

$$\operatorname{Tr}\left(A_k^\dagger A_l\right) = \delta_{k,l} \quad \text{dla wszystkich } 1 \leq k, l \leq n^2. \tag{3.31}$$

Załóżmy dodatkowo, że $\{B_k\}_{k=1}^{n^2}$ będzie dowolną ortonormalną bazą w $\mathbb{M}_n$ taką, że rozpiszemy w tej bazie każdy element A_k jako liniową kombinację

$$A_k = \sum_{i=1}^{n^2} u_{ik} B_i \quad \text{dla wszystkich } 1 \leq k \leq n^2, \tag{3.32}$$

gdzie $\{u_{ij}\}_{i,j=1}^{n^2} \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem stałych. Z równania (3.31) widzimy, że

$$\delta_{k,l} = \operatorname{Tr}\left(A_k^\dagger A_l\right) = \sum_{i,j=1}^{n^2} \overline{u_{ik}} u_{jl} \operatorname{Tr}\left(B_i^\dagger B_j\right) = \sum_{i=1}^{n^2} \overline{u_{ik}} u_{il}, \tag{3.33}$$

wynika stąd, że macierz (u_{ij}) jest macierzą unitarną. Wynika stąd, że $\{\frac{1}{\sqrt{n}} A_k\}_{k=1}^{n^2}$ oraz $\{\frac{1}{\sqrt{n}} B_k\}_{k=1}^{n^2}$ reprezentują te same odwzorowanie całkowicie dodatnie. W związku z czym z drugiej strony jeśli wybierzemy $\{B_k\}_{k=1}^{n^2} = \{|i\rangle\langle j|\}_{i,j=1}^{n}$ to pokazuje, że $\{\frac{1}{\sqrt{n}}A_k\}_{k=1}^{n^2}$ jest rodziną operatorów Krausa dla odwzorowania Φ wtedy gdy $\{A_k\}_{k=1}^{n^2}$ jest bazą ortonormalną w $\mathbb{M}_n$.

Odwzorowania całkowicie dodatnie są całkowicie scharakteryzowane przez operatory Krausa. Odwzorowanie liniowe, które zachowuje hermitowskość $\Phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ można zapisać w postaci [Sti55b]

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i W_i X W_i^\dagger, \tag{3.34}$$

gdzie $k \leq m, n$,$\eta_i \in \mathbb{R}$ i $W_i : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ są dowolnymi liniowymi operatorami. Podstawiając $V_i = \sqrt{\eta_i} W_i$ otrzymujemy następujące twierdzenie stanowiące pełną charakteryzację odwzorowań całkowicie dodatnich[Cho75a, Kra83] w reprezentacji Choi-Kraus-Stinespringa.

Twierdzenie 3.15. *Odwzorowanie $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ działający ze skończenie-wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_A$ do skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_B$ jest liniowe, całkowicie dodatnie oraz zachowujące ślad wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\Phi(X_A) = \sum_{l=1}^{d} V_l X_A V_l^\dagger, \tag{3.35}$$

gdzie $X_A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$, $V_l : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ nazywane operatorami Krausa dla wszystkich $l \in \{1, \ldots, d\}$, ponadto

$$\sum_{l=1}^{d} V_l^\dagger V_l = \mathbb{1}_A, \tag{3.36}$$

oraz $d \leq m \cdot n$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ ma rozkład postaci (3.35) dla operatorów V_l spełniających warunek (3.36). Wtedy Φ w oczywisty sposób jest odwzorowaniem liniowym. Jest całkowicie dodatnie ponieważ $(\mathrm{id}_R \otimes \Phi)(X_{RA}) \geq 0$ jeśli $X_{RA} \geq 0$ dla Φ postaci (3.35) i zachodzi to dla dowolnego układu referencyjnego R o dowolnym rozmiarze. Ponieważ zauważmy, że

$$(\mathrm{id}_R \otimes \Phi)(X_{RA}) = \sum_{l=1}^{d} (\mathbb{1}_R \otimes V_l) X_{RA} (\mathbb{1}_R \otimes V_l^\dagger) \tag{3.37}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} (\mathbb{1}_R \otimes V_l) X_{RA} (\mathbb{1}_R \otimes V_l)^\dagger. \tag{3.38}$$

Wiemy, że $(\mathbb{1}_R \otimes V_l) X_{RA} (\mathbb{1}_R \otimes V_l)^\dagger \geq 0$ dla wszystkich l dla $X_{RA} \geq 0$ jest to też prawdziwe dla sumy. Zachowanie śladu zachodzi ponieważ

$$\operatorname{Tr}\Big(\Phi(X_A)\Big) = \operatorname{Tr}\left(\sum_{l=1}^{d} V_l X_A V_l^\dagger\right) \tag{3.39}$$

$$= \operatorname{Tr}\left(\sum_{l=1}^{d} V_l^\dagger V_l X_A\right) \tag{3.40}$$

$$= \operatorname{Tr} X_A, \tag{3.41}$$

gdzie w drugiej równości wykorzystaliśmy fakt, że możemy przestawiać elementy pod śladem cyklicznie oraz ostatnia równość wynika z warunku (3.36). Teraz udowodnimy w drugą stronę. Niech $m = \dim(\mathcal{H}_A)$ oraz $n = \dim(\mathcal{H}_B)$, przez $|\Gamma\rangle_{RA}$ oznaczymy nieunormowany maksymalnie splątany wektor

$$|\Gamma\rangle_{RA} = \sum_{i=1}^{m} |i\rangle_R \otimes |i\rangle_A\,, \tag{3.42}$$

gdzie $\{|i\rangle_A\}$ to zbiór ortonormalny dla układu A oraz $\{|i\rangle_B\}$ to zbiór ortonormalny bazy dla układu R. Macierz Choi odwzorowania liniowego Φ które jest całkowicie dodatnie, zachowujące ślad jest zdefiniowany następująco

$$\Phi(|\Gamma\rangle\langle\Gamma|_{RA}) = \sum_{i,j=1}^{m} |i\rangle\langle j|_R \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|_A). \tag{3.43}$$

Macierz ta opisuje w pełni działanie odwzorowania ponieważ odwzorowanie liniowe działa na każdy element operatora $|i\rangle\langle j|_A$, z którego możemy zbudować dowolny inny operator na którym to działa odwzorowanie. Macierz Choi jest wymiaru $mn \times mn$ i składa się z bloków o elementach $\Phi(|i\rangle\langle j|_A)$. Dodatkowo powyższa macierz Choi jest dodatnio określona ponieważ odwzorowanie jest całkowicie dodatnie. Możemy zatem zdiagonalizować $\Phi(|\Gamma\rangle\langle\Gamma|_{RA})$ w następujący sposób

$$\Phi(|\Gamma\rangle\langle\Gamma|_{RA}) = \sum_{l=1}^{d} |\phi_l\rangle\langle\phi_l|_{RB}\,, \tag{3.44}$$

gdzie $d \leq m \cdot n$ jest rzędem Choi odwzorowania Φ. Taka dekompozycja nie koniecznie musi mieć zbiór wektorów $\{|\phi_l\rangle_{RB}\}$ który jest ortonormalny. Zauważmy, że z równania (3.43) możemy napisać

$$(\langle i|_R \otimes \mathbb{1}_B)(\Phi(|\Gamma\rangle\langle\Gamma|_{RA}))(|j\rangle_R \otimes \mathbb{1}_B) = \Phi(|i\rangle\langle j|). \tag{3.45}$$

Rozważmy dowolny dwu-układowy wektor $|\phi\rangle_{RB}$, możemy rozłożyć go w bazie ortonormalnej składającej się z wektorów $\{|j\rangle_B\}$ i $\{|i\rangle_R\}$ zdefiniowanych powyżej

$$|\phi\rangle_{RB} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\,|i\rangle_R \otimes |j\rangle_B\,. \tag{3.46}$$

Niech $V : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ będzie operatorem liniowym zdefiniowanym jako

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} |j\rangle_B \langle i|_A . \tag{3.47}$$

Wtedy widzimy, że

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1}_R \otimes V) |\Gamma\rangle_{RA} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} |j\rangle_B \langle i|_A \sum_{k=1}^{m} |k\rangle_R \otimes |k\rangle_A && (3.48)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,j} |k\rangle_R \otimes |j\rangle_B \langle i|k\rangle_A && (3.49)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} |i\rangle_R \otimes |j\rangle_B && (3.50)\\
&= |\phi\rangle_{RB} . && (3.51)
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że wszystkie wektory $|\phi\rangle_{RB}$ możemy znaleźć takie operatory linowe V dla których $(\mathbb{1} \otimes V)(|\Gamma\rangle_{RA}) = |\phi\rangle_{RB}$. Zauważmy też, że

$$\begin{aligned}
\langle i|_R |\phi\rangle_{RB} &= \langle i|_R (\mathbb{1}_R \otimes V) |\Gamma\rangle_{RA} && (3.52)\\
&= V |i\rangle_A . && (3.53)
\end{aligned}$$

Aplikując to do naszego przypadku, możemy napisać, że dla dowolnego l zachodzi

$$|\phi_l\rangle_{RB} = \mathbb{1}_R \otimes V_l |\Gamma\rangle_{RA} , \tag{3.54}$$

gdzie V_l jest operatorem liniowym zdefiniowanym w (3.47). Dzięki tej obserwacji możemy dalej napisać, że

$$\begin{aligned}
\Phi(|i\rangle\langle j|) &= (\langle i|_R \otimes \mathbb{1}_B)(\Phi(|\Gamma\rangle\langle\Gamma|_{RA}))(|j\rangle_R \otimes \mathbb{1}_B) && (3.55)\\
&= (\langle i|_R \otimes \mathbb{1}_B) \sum_{l=1}^{d} |\phi_l\rangle\langle\phi_l|_{RB} (|j\rangle_R \otimes_B) && (3.56)\\
&= \sum_{l=1}^{d} [(\langle i|_R \otimes \mathbb{1}_B) |\phi_l\rangle_{RB}][\langle\phi_l|_{RB} (|j\rangle_R \otimes \mathbb{1}_B)] && (3.57)\\
&= \sum_{l=1}^{d} V_l |i\rangle\langle j|_A V_l^\dagger . && (3.58)
\end{aligned}$$

Z liniowości odwzorowania Φ wynika, że działanie na dowolnym operatorze σ może zostać zapisane w następujący sposób

$$\Phi(\sigma) = \sum_{l=1}^{d} V_l \sigma V_l^\dagger , \tag{3.59}$$

ponieważ każdy operator σ może zostać zapisany jako liniowa kombinacja operatorów w bazie $\{|i\rangle\langle j|\}$. Jeśli rozkład (3.44) jest rozkładem spektralnym, wtedy operatory Krausa $\{V_l\}$ są ortogonalne względem iloczynu Hilberta-Schmidta

$$\mathrm{Tr}\left(V_l^\dagger V_k\right) = \delta_{l,k}\,\mathrm{Tr}\left(V_l^\dagger V_l\right). \tag{3.60}$$

To natomiast wynika z następującego faktu, że

$$\begin{aligned}\delta_{l,k}\,\langle\phi_l|\phi_l\rangle &= \langle\phi_l|\phi_l\rangle &(3.61)\\ &= \langle\Gamma|_{RB}\left[\mathbb{1}_R\otimes\left(V_l^\dagger V_k\right)\right]|\Gamma\rangle_{RB} &(3.62)\\ &= \mathrm{Tr}\left(V_l^\dagger V_k\right). &(3.63)\end{aligned}$$

Aby udowodnić zachowywanie śladu, czyli

$$\mathrm{Tr}\Big(\Phi(|i\rangle\langle j|_A)\Big) = \mathrm{Tr}\,|i\rangle\langle j|_A = \delta_{ij}, \tag{3.64}$$

dla wszystkich operatorów $\{|i\rangle\langle j|_A\}_{i,j}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Big(\Phi(|i\rangle\langle j|_A)\Big) &= \mathrm{Tr}\left(\sum_l V_l(|i\rangle\langle j|_A)V_l^\dagger\right) &(3.65)\\ &= \mathrm{Tr}\left(\sum_l V_l^\dagger V_l(|i\rangle\langle j|_A)\right) &(3.66)\\ &= \langle j|_A\sum_l V_l^\dagger V_l\,|i\rangle_A\,. &(3.67)\end{aligned}$$

Stąd aby mieć (3.64) musi zachodzić

$$\langle j|_A\sum_l V_l^\dagger V_l\,|i\rangle_A = \delta_{i,j}, \tag{3.68}$$

co kończy dowód. ■

Reprezentacja pokazana w Twierdzeniu (3.11) stanowi jedną z możliwych reprezentacji odwzorowań całkowicie dodatnich. Inną ważną reprezentację stanowi reprezentacja Stinespringa [Sti55a].

Najpierw jednak, przypomnijmy, że odwzorowanie częściowego śladu Tr_i to odwzorowanie które wycina i-ty podukład z system $\mathbb{M}_A\otimes\mathbb{M}_B\otimes\ldots\otimes\mathbb{M}_K$. Dla przykładu niech $i=2$ wtedy odwzorowanie Tr_2 jest odwzorowaniem liniowym który działa na produkt tensorowy w następujący sposób $\mathrm{Tr}_2(A\otimes B) = \mathrm{Tr}(B)A$. Zauważmy, że samo odwzorowanie śladu $\mathrm{Tr}:\mathbb{M}_m\to\mathbb{C}$ jest całkowicie dodatnie ponieważ jego macierz Choi, to $\mathbb{1}_m\geq 0$ w związku z czym, odwzorowanie częściowego śladu Tr_i też jest całkowicie dodatnie. Wyniki Stinespringa mówią, że każde odwzorowanie całkowicie dodatnie można zapisać jako złożenie odwzorowania częściowego śladu oraz odwzorowania samosprzężonego. Oryginalne wyniki były pokazane dla nieskończenie wymiarowych przestrzeni [Sti55a, Pau03] lecz my skupimy się na wersji dla skończenie wymiarowych przestrzeni.

Twierdzenie 3.16 (Stinespring). *Niech $\Phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ będzie odwzorowaniem liniowym. Φ jest całkowicie dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją operatory $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{mn} \otimes \mathbb{C}^n$ takie, że $\Phi = \mathrm{Tr}_1 \circ Ad_A$.*

W literaturze postać odwzorowani $\Phi = \mathrm{Tr}_1 \circ \mathrm{Ad}_A$ nazywa się reprezentacją Stinespringa dla odwzorowań całkowicie dodatnich Φ. Zauważmy, że definiując operatory A z Twierdzenia (3.16) jako macierze blokowe $\mathbb{M}_{mn,1}(M_{n,m}) \simeq \mathbb{M}_{mn,1} \otimes M_{n,m}$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{mn} \end{bmatrix}, \tag{3.69}$$

gdzie $\{A_l\}_{l=1}^{mn}$ będą operatorami Krausa dla odwzorowania Φ. Widzimy wtedy, że możemy przechodzić z reprezentacji Stinespringa do reprezentacji Krausa i vice versa dla odwzorowań całkowicie dodatnich. Zachowywanie śladu przez odwzorowanie Φ odpowiada temu, żeby A było izometrią, czyli $A^\dagger A = \mathbb{1}_m$.

3.3 Odwzorowania k-dodatnie jako indykatory (świadkowie) k-splątania

W teorii informacji głównym zasobem są stany splątane, dlatego ważne jest znalezienie optymalnego kryterium do stwierdzania czy dany ρ jest separowalny czy splątany. Na przestrzeni dwóch dekad dokonano na tym polu znacznych postępów. Jeden z ważniejszych wyników stwierdza, że stan ρ jest separowalny wtedy i tylko wtedy gdy pozostaje dodatni po zaaplikowaniu dowolnego dodatniego odwzorowania na połowę stanu [HHH96, Per96], tak jak wtedy i tylko wtedy gdy $(\mathrm{id} \otimes \Phi)(\rho) \geq 0$ dla dodatniego Φ. Ważnym przypadkiem jest gdy za odwzorowanie dodanie Φ wybierzemy odwzorowanie transpozycji T. W tym wypadku, na operację $(\mathrm{id} \otimes T)$ mówimy częściowa transpozycja i w skrócie będziemy używać notacji $\rho^\Gamma := (\mathrm{id} \otimes T)(\rho)$. W niskowymiarowych układach, czyli takich dla których $m \cdot n \leq 6$ mamy pełną charakteryzację stanów separowalnych. Stan ρ jest separowalny wtedy i tylko wtedy gdy $\rho^\Gamma \geq 0$ [HHH96, Wor76a, Stø63] ale w ogólności w wyższych wymiarach kryterium częściowej transpozycji daje tylko warunek konieczny a nie wystarczający. W szczególności z faktu, że odwzorowanie transpozycji może zostać użyte do badania separowalności w specjalnych przypadkach doprowadziło do badania stanów dodatnio określonych po częściowej transpozycji (ang. PPT - *Positive Partial Transpose*) w dowolnych wymiarach dla których operatory gęstości ρ są $\rho^\Gamma \geq 0$. Pierwszym przykładem stanu splątanego

PPT w $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ został podany w pracy [Hor97] i ma następującą postać

$$\rho_a = \frac{1}{8a+1}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot \\ a & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & c & \cdot & b \end{array}\right], \tag{3.70}$$

gdzie $b = \frac{1+a}{2}$, $c = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$ natomiast parametr $a \in [0,1]$. W pracy aby była bardziej przejrzysta dla czytelnika, zera w macierzach będą reprezentowane przez kropki jeśli nie będzie budzić to żadnych wątpliwości.

W związku z czym naturalną generalizacją charakteryzacji stanów separowalnych w terminach odwzorowań dodatnich zostało pokazane w [TH00] i udowodnione w [RA07].

Twierdzenie 3.17. *Niech $\Phi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech $\rho \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$ będzie macierzą gęstości. Wtedy*

1. *Φ jest k-dodatnie wtedy i tylko wtedy gdy $(\mathrm{id} \otimes \Phi)(\sigma) \geq 0$ dla wszystkich $\sigma \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n$ z $SN(\sigma) \leq k$ oraz*
2. *$SN(\rho) \leq k$ wtedy i tylko wtedy gdy $(\mathrm{id} \otimes \Psi)(\rho) \geq 0$ dla wszystkich odwzorowań k-dodatnich $\Psi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$.*

Twierdzenie (3.17) ustala dualizm między odwzorowaniami k-dodatnimi a macierzami gęstości z liczbą Schmidta nie większą niż k. Z warunku (2) Twierdzenia (3.17) możemy wywnioskować, że wybór dowolnego odwzorowania k-dodatniego Ψ daje nam warunki konieczne na stan ρ aby $SN(\rho) \leq k$. Na przykład dla $k = 1$ dobierzmy $\Psi = T$ wtedy widzimy, znajomą już implikację, że jeśli stan ρ jest separowalny to $\rho^\Gamma \geq 0$. Innym dobrze znanym kryterium separowalności jest kryterium redukcji [CAG99] które głosi, że stan ρ jest separowalny gdy $\rho \leq \mathrm{Tr}_2(\rho \otimes \mathbb{1})$ oraz $\rho \leq \mathbb{1} \otimes \mathrm{Tr}_1 \rho$. Tak jak w przypadku kryterium częściowej transpozycji jest powiązane z odwzorowaniem transpozycji tak i w tym przypadku, kryterium redukcji jest powiązane z odwzorowaniem dodatnim tak zwanej redukcji $\Phi(X) = \mathrm{Tr}(X)\mathbb{1} - X$. Naturalnym uogólnieniem dla kryterium redukcji będą zatem stany o większej liczbie Schmidta takie, że $SN(\rho) \leq k$ to $\rho \leq k \,\mathrm{Tr}_2 \rho \otimes \mathbb{1}$ oraz $\rho \leq k\mathbb{1}\, \mathrm{Tr}_1 \rho$ które będą powiązane uogólnionym odwzorowaniem redukcji postaci $\Phi_k(X) = k\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1} - X$, gdzie parametr k determinuje jego k-dodatniość.

Przykład 3.18. Niech $k, n \in \mathbb{N}$ będą takie, że $k \leq n$ oraz rozważmy odwzorowanie $\Phi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ zdefiniowane jako $\Phi(X) = k\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1} - X$. Używając twierdzenia o rozkładzie Schmidta możemy pokazać, że to odwzorowanie jest k-dodatnie jeśli $k < n$ i nie $(k+1)$-dodatnie. Aby zobaczyć, że Φ nie jest $(k+1)$-dodatnie dla $k < n$, rozważmy działanie tego odwzorowania na projektor na następujący stan $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} |i\rangle \otimes$

$|i\rangle \in \mathbb{C}^{k+1} \otimes \mathbb{C}^n$

$$(\mathrm{id}_{k+1} \otimes \Phi)(|\psi\rangle\langle\psi|) = \frac{1}{k+1} \sum_{i,j=1}^{k+1} |i\rangle\langle j| \otimes \Phi(|i\rangle\langle j|) \tag{3.71}$$

$$= \frac{1}{k+1}\Big(k\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sum_{i,j=1}^{k+1} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j|\Big). \tag{3.72}$$

Ponieważ operator $\sum_{i,j=1}^{k+1} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j|$ posiada wartość własną $k+1$ odpowiadająca wektorowi własnemu $|\psi\rangle$ to wiemy, że $(\mathrm{id}_{k+1} \otimes \Phi)(|\psi\rangle\langle\psi|)$ ma $(k-(k+1))/(k+1) = -1/(k+1)$ jako wartość własną. W związku z czym odwzorowanie rozszerzone $(\mathrm{id}_{k+1} \otimes \Phi)(|\psi\rangle\langle\psi|)$ nie jest określone dodatnio dla stanu czystego $|\psi\rangle\langle\psi|$ więc Φ nie jest $(k+1)$-dodatnie.

Z drugiej strony pokażemy, że odwzorowanie Φ jest k-dodatnie. Zauważmy, że z liniowości, wystarczy pokazać, że odwzorowanie rozszerzone $(\mathrm{id}_k \otimes \Phi)$ jest dodatnie na stanie czystym $|v\rangle\langle v| \in \mathbb{M}_k \otimes \mathbb{M}_m$. Rozważmy stan czysty o rozkładzie Schmidta $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle$. Zauważmy, że $\mathbb{1} \geq |b_i\rangle\langle b_i|$ co implikuje, że $k\mathbb{1} - |b_i\rangle\langle b_i| \geq (k-1)|b_i\rangle\langle b_i|$. Ponieważ zbiór wektorów $|b_i\rangle$ stanowi bazę ortonormalną to możemy zapisać

$$(\mathrm{id}_k \otimes \Phi)(|v\rangle\langle v|) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i\alpha_j |a_i\rangle\langle a_j| \otimes (k\langle b_j|b_i\rangle\, \mathbb{1} - |b_i\rangle\langle b_j|) \tag{3.73}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k}(k-1)\alpha_i^2 |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i| - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \alpha_i\alpha_j |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_i\rangle\langle b_j| \tag{3.74}$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \Big(\alpha_i^2 |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i| - \alpha_i\alpha_j |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_i\rangle\langle b_j|\Big) \tag{3.75}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \Big(\alpha_i^2 |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i| - \alpha_i\alpha_j |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_i\rangle\langle b_j| \tag{3.76}$$

$$- \alpha_i\alpha_j |a_j\rangle\langle a_i| \otimes |b_j\rangle\langle b_i| + \alpha_j^2 |a_j\rangle\langle a_j| \otimes |b_j\rangle\langle b_j|\Big). \tag{3.77}$$

Ostatnią równość można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} (\alpha_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle - \alpha_j |a_j\rangle \otimes |b_j\rangle)(\alpha_i \langle a_i| \otimes \langle b_i| - \alpha_j \langle a_j| \otimes \langle b_j|) \geq 0, \tag{3.78}$$

co implikuje, że Φ jest k-dodatnie.

Twierdzenie 2.25 charakteryzujące separowalność możemy przeformułować w terminach odwzorowań dodatnich. Wykorzystując izomorfizm Jamiołkowskiego który wyznacza jednoznaczną relację między liniowymi operatorami a liniowymi odwzorowaniami działających między liniowymi operatorami.

Ponieważ każde odwzorowanie hermitowskie można zapisać w postaci (3.34), nie jest więc jasne jak odróżnić odwzorowania hermitowskime a odwzorowania dodatnimi używając samego izomorfizmu. Jedną z metod, to stowarzyszyć z operatorem W liniowy funkcjonał $f_W(|\psi\rangle) = \langle\psi| W |\psi\rangle$ który możemy scharakteryzować w następujący sposób.

Twierdzenie 3.19. *Odwzorowanie liniowe $\Lambda_W : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ jest dodatnie wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadający mu funkcjonał liniowy f_W określony na $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ jest dodatni na wektorach produktowych.*

Można ten wynik interpretować tak, że każdemu odwzorowaniu dodatniemu odpowiada świadkowi splątania. Podsumowując powyższe możemy napisać następujące twierdzenie które pojawiło się jako pierwsze w pracy [HHH96].

Twierdzenie 3.20. *Niech $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ będzie macierzą gęstości, jest ona separowalna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\mathrm{id} \otimes \Lambda)(\rho) \geq 0, \tag{3.79}$$

dla wszystkich dodatnich odwzorowań $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}_B) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$.

Dowód. Z każdym odwzorowaniem liniowym $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}_B) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ jest stowarzyszone odwzorowanie sprzężone $\Lambda^\dagger : \mathcal{B}(\mathcal{H}_B) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ zdefiniowane jako

$$\mathrm{Tr}\Big(A\Lambda(B)\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\Lambda^\dagger(A)B\Big), \tag{3.80}$$

dla wszystkich operatorów A, B. Dla odwzorowania dodatnie, jego odwzorowanie sprzężone dalej jest dodatnie. Załóżmy, że mamy stan ρ który jest splątany, wtedy z Twierdzenia 2.25 wynika, że istnieje świadek splątania W taki, że $\mathrm{Tr}\,\rho W < 0$. Korzystając z izomorfizmu Jamiołkowskiego oraz Twierdzenia 3.19 oznacza, że

$$\mathrm{Tr}\,\Big((\mathrm{id} \otimes \Lambda_W)(P_+)\rho\Big) = \mathrm{Tr}\,\Big((\mathrm{id} \otimes \Lambda_W^\dagger)(\rho)P_+\Big) < 0, \tag{3.81}$$

ponieważ P_+ jest dodatni to oznacza, że $(\mathbb{1} \otimes \Lambda_W^\dagger)(\rho) \not\geq 0$. Przeciwnie, niech $\Lambda_W^\dagger$ będzie odwzorowaniem dodatnim takim, że $(\mathbb{1} \otimes \Lambda_W^\dagger)(\rho)$ ma ujemną wartość własną odpowiadającą wektorowi własnemu $|\phi\rangle = A \otimes \mathbb{1}\,|\psi_+\rangle$. Wtedy dostajemy

$$\langle\phi|\,\mathrm{id} \otimes \Lambda_W^\dagger(\rho)\,|\phi\rangle = \mathrm{Tr}\,\Big((A \otimes \mathbb{1})W(A^\dagger \otimes \mathbb{1})\rho\Big) < 0. \tag{3.82}$$

Ponieważ W jest dodatnie na stanach separowalnych, to w szczególności zachodzi to też dla $(A \otimes \mathbb{1})W(A^\dagger \otimes \mathbb{1})$. W związku z czym stan ρ musi być splątany. ∎

Dowód Twierdzenia 3.20 uwypukla dwa ważne fakty dotyczące relacji między świadkami splątania a odwzorowaniami dodatnimi. Jeśli pewne dodatnie odwzorowanie Λ_W jest ujemne dla stanu ρ to z dowodu widzimy, jak konstruować operator A taki że dla lokalnej transformacji

$$\rho \mapsto (A^\dagger \otimes \mathbb{1})\rho(A \otimes \mathbb{1}), \tag{3.83}$$

otrzymany stan będzie wykrywany przez świadka splątania W. Po drugie dla pewnego świadka splątania W odpowiadające mu odwzorowanie dodatnie $\Lambda_W^\dagger$ zawsze wykryje więcej stanów niż sam świadek, ponieważ wykrywa ono wszystkie stany wykrywane przez klasę świadków $(A \otimes \mathbb{1})W(A^\dagger \otimes \mathbb{1})$ dla wszystkich operatorów A.

Przykład 3.21. Rozważmy świadka splątania danego przez operator przerzucania (ang. *swap*) F. Nie trudno zauważyć, że odwzorowanie stowarzyszone z tym świadkiem splątania to odwzorowanie transpozycji T. Dla stanu separowalnego $\rho = \sum_i p_i \, |\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle\langle\psi_i^B|$ mamy, że $(\mathrm{id} \otimes T)(\rho) \geq 0$ gdzie dla stanu maksymalnie splątanego nie musi to być prawdą. Przypomnijmy, że piszemy $(\mathrm{id} \otimes T)\rho = \rho^{\Gamma_B}$ i nazywamy to operacją częściowej transpozycji na układzie B.

Świadków splątania możemy podzielić na klasę świadków rozkładalnych oraz nierozkładalnych. Mówimy, że świadek splątania C_Φ jest rozkładalny, gdy odpowiadające mu odwzorowanie Φ jest rozkładalne, analogicznie z nierozkładalnością. Warunek rozkładalności świadka C_Φ możemy wyrazić w następujący sposób, świadek C_Φ jest rozkładalny wtedy i tylko wtedy gdy można go przedstawić w postaci

$$C_\Phi = C_{\Phi_1} + C_{\Phi_2}^\Gamma, \tag{3.84}$$

gdzie C_{Φ_1} i C_{Φ_1} to operatory dodatnie, czyli odwzorowania odpowiadające tym operatorom są całkowicie dodatnie. Zauważmy, że stan splątany może być wykrywany tylko przez nierozkładalne odwzorowania lub równoważnie nierozkładalnego świadka splątania.

Przykład 3.22. Niech $\Phi : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_3$ będzie zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned} \Phi(X) = {} & \sum_{i=1}^{3} e_{ii} X e_{ii} + e_{12} X e_{21} + e_{23} X e_{32} + e_{31} X e_{13} \\ & + \sum_{u \neq j} G_{ij} X G_{ij}^\dagger - \sum_{i \neq j} F_{ij} X F_{ij}^\dagger, \end{aligned} \tag{3.85}$$

gdzie $e_{ij} := |i\rangle\langle j|$, $F_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ii} + e_{jj})$ oraz $G_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ii} - e_{jj})$ dla $i, j = 1, 2, 3$. Odwzorowanie to jest dodatnie oraz nierozkładalne.

Dodatniość wykażemy wykorzystując fakt, że wyznacznik odwzorowania jest dodatnio określony. Odwzorowanie (3.85) działa na macierz $X = (x_{ij})$ następująco

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{22} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & x_{22} + x_{33} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{33} + x_{11} \end{bmatrix}. \tag{3.86}$$

Zdefiniujmy dodatni argument D o postaci

$$D = \begin{bmatrix} a & c & f \\ \bar{c} & b & e \\ \bar{f} & \bar{e} & d \end{bmatrix}, \tag{3.87}$$

po zadziałaniu odwzorowania na element D dostajemy, że

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} a+b & -c & -f \\ -\overline{c} & b+d & -e \\ -\overline{f} & -\overline{e} & d+a \end{bmatrix}, \tag{3.88}$$

macierz jest dodatnia, gdy $\det\left(\widetilde{D}\right) \geq 0$. Aby $D \geq 0$ musi być spełnione

$$abd + ce\overline{f} + \overline{ce}f - b|f|^2 - a|e|^2 - d|c|^2 \geq 0. \tag{3.89}$$

Niech $t, s, r \in \mathbb{C}$ takie, że $|t| \leq 1$, $|s| \leq 1$ i $|r| \leq 1$ takie, że $c = \sqrt{ab}t$, $e = \sqrt{bd}s$ oraz $f = \sqrt{ad}r$. Wtedy

$$\det\left(\widetilde{D}\right) \geq a^2 d + ab^2 + bd^2 + abd \geq 0, \tag{3.90}$$

co pokazuje, że odwzorowanie Φ jest dodatnie dla wszystkich dodatnich argumentów.

Przypomnijmy, że odwzorowanie jest rozkładalne wtedy gdy istnieje rozkład $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \circ T$, gdzie Φ_1, Φ_2 są odwzorowaniami całkowicie dodatnimi. Dla dowolnych liczb dodatnich a, b takich, że $ab \geq 1$ oraz $a \neq 1$, zdefiniujmy stan $\rho \in \mathbb{M}_3 \otimes \mathbb{M}_3$

$$\rho = \frac{1}{3(1+a+b)} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & a & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & b & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right] = \frac{1}{3(1+a+b)}\rho_0. \tag{3.91}$$

Stan ρ jest PPT ponieważ ρ jest symetryczny ze względu na częściową transpozycję. Jednak zauważmy, że

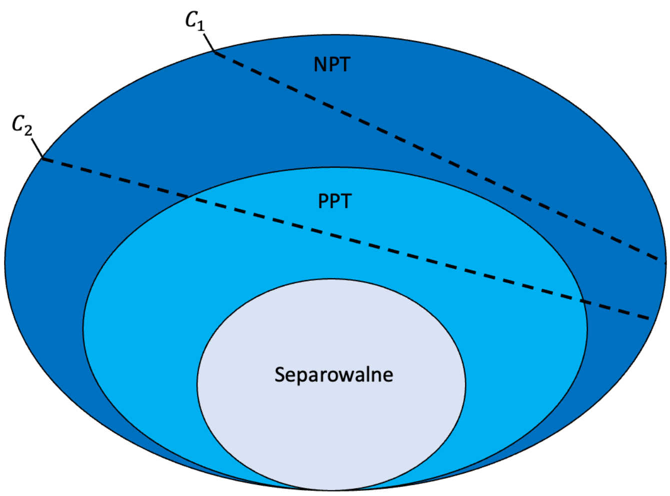
$$(\mathrm{id}_3 \otimes \Phi)(\rho_0) =$$

$$\frac{1}{3(1+a+b)} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1+a & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & a+b & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b+1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & -1 & \cdot & b+1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1+a & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a+b & \cdot & -1 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & a+b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & b+1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1+a \end{array}\right],$$

nie jest dodatnio określona ze względu na to, że wektor własny $(1,0,0,0,1,0,0,0,1)^T$ operatora $(\mathrm{id}_3 \otimes \Phi)(\rho_0)$ posiada wartość własną $a-1$, która jest ujemna dla $a < 1$.

W związku z powyższym możemy podsumować fakty dotyczące odwzorowań dodatnich i odpowiadającym ich świadków splątania

1. Stan $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ jest splątany wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje świadek splątania C_Φ taki, że $\mathrm{Tr}(C_\Phi \rho) < 0$.
2. Stan ρ jest PPT splątany, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nierozkładalny świadek splątania C_Φ taki, że $\mathrm{Tr}(C_\Phi \rho) < 0$.
3. Stan $\sigma \in \mathcal{S}$ jest separowalny, jeśli $\mathrm{Tr}(C_\Phi \sigma) \geq 0$ dla każdego świadka splątania.
4. $C_\Phi \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest odwzorowaniem całkowicie dodatnim.
5. C_Φ jest świadkiem splątania wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest odwzorowaniem dodatnim ale nie całkowicie dodatnim.
6. C_Φ jest rozkładalnym świadkiem splątania wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające mu odwzorowanie Φ jest rozkładalne.



Rysunek 3.1: Schematyczna ilustracja zbiorów stanów NPT, PPT oraz separowalnych. Świadek splątania C_1 jest rozkładalnym świadkiem splątania przez co wykrywa jedynie stany NPT. C_2 jest nierozkładalnym świadkiem splątania przez co ma on możliwość wykrycia stanów PPT.

Można zatem wywnioskować, że jedną z metod konstrukcji odwzorowań nierozkładalnych jest poprzez warunek, aby znaleźć stan PPT splątany dla którego macierz Choi odwzorowania nierozkładalnego byłaby świadkiem splątania [HHH01]. Dla przykładu, Størmer konstruował stany PPT [DPS04a, HHH99, Sud05] dla których świadkiem splątania była macierz Choi odpowiadająca odwzorowaniu nierozkładalnego Choi. Istnieje wiele metod konstrukcji stanów PPT [BFP04, Bre06, Pia06, ABLS01, AH06, DPS04a, DÖ1, Ish04, FLJS06, WW01] których część pomogły zbudować przykłady odwzorowań nierozkładalnych [HK04, HK05, HKP03]. Mimo to charakteryzacja odwzorowań nierozkładalnych i nawet charakteryzacja stanów PPT wciąż nie zostały rozwiązane stawiając je jako jedne z najważniejszych problemów fizyki matematycznej.

3.4 Rozkładalność i stany PPT

W tej sekcji pracy omówimy klasyczne wyniki które dały pełną charakteryzację dla odwzorowań dodatnich na niskowymiarowych algebrach macierzowych. Część dowodów jest zawarta w pracach [VDD01, LCK99, EK06].

Twierdzenie 3.23 (Woronowicz, Størmer [Wor76a, Stø63])**.** *Niech $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ będzie odwzorowaniem dodatnim dla $n \leq 3$. Wtedy Λ możemy zapisać w następującej formie*

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \circ T, \tag{3.92}$$

dla Λ_1, Λ_2 całkowicie dodatnich.

Odwzorowaniem rozkładalnym, nazywamy odwzorowanie które można zapisać jako sumę odwzorowania całkowicie dodatniego oraz całkowicie kododatniego, czyli odwzorowania całkowicie dodatniego złożonego z transpozycją. Widać stąd od razu, stany splątane wykrywane przez odwzorowania rozkładalne będą również wykrywane przez samą częściową transpozycję. Z Twierdzenia (3.20) wynika, że wszystkie dwu-układowe stany $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dla których $\dim \mathcal{H} \leq 6$, dodatniość częściowej transpozycji daje warunek wystarczający i konieczny dla separowalności stanów.

Pierwszym przykładem odwzorowania które było nierozkładalne, czyli nie dało zapisać się w postaci (3.92) było pokazane przez Choi [Cho75b, CL77, Cho80]. Niech $\Lambda_C : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ będzie odwzorowaniem liniowym zdefiniowanym jako

$$\Lambda_C(X) = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{33} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & x_{22} + x_{11} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{33} + x_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.93}$$

dla wszystkich macierzy $X = (x_{ij})$ wymiaru 3×3. W oryginalnej pracy [Cho80] Choi pokazał, że odwzorowanie to jest dodatnie dla rzeczywistych dodatnio określonych macierzy (czyli symetrycznych) ale można zauważyć, że jest to też prawda dla wszystkich macierzy dodatnio określonych. Pokażemy, że to odwzorowanie nie jest rozkładalne na przykładzie Størmera [Stø82] wykorzystując kryterium PPT dla niskowymiarowych algebr macierzowych [HHH99, HHH01, DPS04a]. Zdefiniujmy liczbę z zakresu $0 \leq \alpha \leq 5$ oraz stan

$$\sigma = \frac{1}{7}[2P_+ + \alpha\sigma_+(5-\alpha)\sigma_-], \tag{3.94}$$

gdzie

$$\sigma_+ = \frac{1}{3}(|01\rangle\langle 01| + |12\rangle\langle 12| + |20\rangle\langle 20|), \tag{3.95}$$

oraz $\sigma_- = F\sigma_+F$. Stan σ jest dodatnio określony po częściowej transpozycji dla parametru $0 \leq \alpha \leq 4$, dla innych zakresów ten stan nie jest dodatnio określony po częściowej transpozycji (ang. NPT - *negative partial transpose*) aczkolwiek wciąż jest splątany. Prosta analiza pokazuje, że $(\mathrm{id} \otimes \Lambda_C)(\sigma)$ nie jest dodatnio określona dla $3 \leq \alpha \leq 4$ i $1 \leq \alpha \leq 2$ ponieważ posiada wartość własną $\lambda = (3-\alpha)/2$. To pokazuje nam, że odwzorowanie Λ_C jest nierozkładalne mimo, że stan σ jest PPT splątany dla tych przedziałów α. W następstwie pracy Choia, studiowano i zaproponowano wiele przykładów odwzorowań nierozkładalnych [Tom85, Wor76a, Tan86, TT83, Rob85a, Osa91, MM04, LW97, LMM06, Hal06, Ha03, CK07]. Jednak wciąż nie ma ogólnych metod na budowę odwzorowań nierozkładalnych. Jedną z możliwych ścieżek aby zrozumieć lepiej strukturę odwzorowań nierozkładalnych jest bardziej abstrakcyjne podejście przy pomocy form kwadratowych.

Z każdym świadkiem splątania W lub alternatywnie z odwzorowaniem dodatnim Λ_W możemy stowarzyszyć bi-hermitowską dodatnią formę

$$F_W(x_i, y_i) = \langle x| \otimes \langle y| W |x\rangle \otimes |y\rangle = \langle x| \Lambda_W(|y\rangle\langle y|) |x\rangle = \sum_{i,j,k,l} W_{ij;kl}\overline{x_i y_j} x_k y_l. \quad (3.96)$$

Załóżmy, że Λ_W ma rzeczywiste współczynniki w jakieś bazie, wtedy dla rzeczywistych x_i, y_i forma F_W jest w literaturze nazywana rzeczywistą formą bikwadratową. Lista zagadnień przedstawiona przez Hilberta na międzynarodowym kongresie matematyków w Paryżu zawiera Problem 17, który stawia pytanie czy wszystkie rzeczywiste dodatnio określone formy można przedstawić jako sumę kwadratów (ang. *Sum of Squares* SOS). Choi [Cho75b, Cho80, Ter01] pokazał, że nierozkładalne odwzorowania, z rzeczywistymi współczynnikami pozwalają zbudować kontrprzykłady dla form kwadratowych, czyli pokazał, że dodatnio określone formy kwadratowe nie muszą się wyrażać za pomocą SOS, co pokażemy w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.24.
1. *Niech F_W będzie rzeczywistą formą bikwadratową której nie można zapisać za pomocą sum kwadratów form liniowych, wtedy stowarzyszone odwzorowanie Λ_W jest nierozkładalne.*
2. *Jeśli odwzorowanie Λ_W jest nierozkładalne z rzeczywistymi współczynnikami, wtedy F_W nie może być wyrażone przy pomocy sum kwadratów.*

Dowód. Najpierw udowodnimy (1), zauważmy, że odwzorowanie rozkładalne działające na rzeczywistych macierzach (symetrycznych) działa jak odwzorowanie całkowicie dodatnie, czyli możemy zapisać

$$\Lambda_W(|y\rangle\langle y|) = \sum_l A_l |y\rangle\langle y| A_l^T, \quad (3.97)$$

gdzie elementy macierzowe $\langle x| A_l |y\rangle = a_{ij}^l$ możemy wykorzystać i zapisać

$$F_w(x_i, y_i) = \langle x| \Lambda_W(|y\rangle\langle y|) |x\rangle = \sum_l \langle x| A_l |y\rangle \langle y| A_l^T |x\rangle = \sum_l (a_{ij}^l x_i y_j)^2. \quad (3.98)$$

Do drugiej części (2), wykorzystując te same argumenty co w (1) wynika, że jeśli F_W można wyrazić za pomocą *SOS* wtedy odwzorowanie Λ_W jest rozkładalne. ∎

Wcześniej pokazaliśmy przykład odwzorowania Choia Λ_C o postaci (3.93) które stanowi przykład odwzorowanie nierozkładalnego. Stowarzyszona z tym odwzorowaniem rzeczywista forma kwadratowa ma postać

$$F_C = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2(x_1x_2y_1y_2 + x_2x_3y_2y_3 + x_3x_1y_3y_1) + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2. \quad (3.99)$$

Choi pokazał dodatniość tej formy kwadratowej i dodatkowo pokazał, że nie może zostać ona wyrażona przy pomocy sum kwadratów [Cho75b] co dowodzi nierozkładalności stowarzyszonego z tą formą odwzorowania.

W duchu prac nad formami kwadratowymi, wykorzystując analogiczne podejście jak Choi, autorzy prac [Buc22, BS20] pokazali, że można konstruować nowe rodziny odwzorowań dodatnich, które nie są całkowicie dodatnich wykorzystując metodę tak zwanego przepisywania zer. Dzięki czemu można konstruować nowe klasy odwzorowań nierozkładalnych oraz rodziny stanów PPT splątanych.

Poza formami kwadratowymi są jeszcze inne, abstrakcyjne podejścia do problemu separowalności. Przykładem może być metoda wykorzystująca do tego język C^*-algebr badanej między innymi przez Marciniaka i Majewskiego [Maj00, Maj04b, Maj04a, MM01].

W pracach [KMSZ17, SWZ08] pokazano, że w ogólności stożek odwzorowań dodatnich jest znacznie większy niż stożek odwzorowań całkowicie dodatnich. Z relacji między odwzorowaniami a operatorami, wiemy, że stożek macierzy dodatnio określonych jest większy niż stożek macierzy separowalnych. W konsekwencji, stożek zbiór wszystkich stanów $\mathcal{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ jest większy niż zbiór stanów separowalnych $\mathcal{S}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ mimo posiadania tego samego promienia (ang. *inradius*) [GB02] oraz tego samego wymiaru

$$\dim \mathcal{S}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n) = \dim \mathcal{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n) = (m \cdot n)^2 - 1. \tag{3.100}$$

Co więcej, do dziś nie posiadamy prostego opisu zbioru wypukłego stanów separowalnych $\mathcal{S}$. Jest to związane z fundamentalnym pytaniem w mechanice kwantowej, teorii kwantowej informacji oraz kwantowej komunikacji - określenie czy stan jest separowalny czy splątany - który jest stanowi Problem NP-trudny (ang *NP-Hard problem*) [Gha08]. W matematyce, odwzorowania dodatnie stanowią główne narzędzie w C^*-algebrach do badania nieujemnych wielomianów oraz sum kwadratów [BRSS22, BSSV21] w połączeniu z programowaniem półokreślonym gdzie odwzorowania dodatnie działają między rzeczywistymi symetrycznymi macierzami. Naturalnym zatem jest rozszerzenie odwzorowań dodatnich działających na $\mathbb{M}_d^{sym}(\mathbb{R})$ do macierzy które są samosprzężone $\mathbb{M}_d^{sa}$ (dodatnio określone) tak aby znalazły zastosowanie w kwantowej teorii informacji. Odwzorowania dodatnie dzięki pracy Horodeckich [HHH96] znalazły szczególne zastosowanie jako świadkowie splątania dla stanów splątanych. Dzięki pracom Størmera i Woronowicza [Stø63, Wor76a] wiemy, że $m = n = 3$ jest to najmniejszy wymiar gdzie odwzorowanie transpozycji nie wykrywa wszystkich stanów splątanych. Dodatkowo w pracy Kye [Kye12] pokazali, że każde odwzorowania 2-dodatnie w wymiarach $m = n = 3$ są rozkładalne co przenosi się na fakt, że każdy stan PPT splątany może mieć co najwyżej liczbę Schmidta równą dwa.

Przykład 3.25. Świadek splątania odpowiadający odwzorowaniu uogólnionego Choi z przykładu 3.8 wygląda następująco

$$W_{[a,b,c]} = \frac{1}{3(a+b+c)} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & b \end{array}\right]. \tag{3.101}$$

Może on wykrywać klasę stanów postaci (nieunormowanych)

$$\rho(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \epsilon_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \epsilon_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon_1^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon_3^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon_2^{-1} & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right], \tag{3.102}$$

gdzie stan ten jest PPT dla dowolnych $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$. W przypadku gdy $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ to jest separowalny [Hor97], oraz przykładowo dla $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \neq \epsilon_3$ jest splątany.

Widzimy zatem, że odwzorowania dodatnie które nie są całkowicie dodatnie stanowią uniwersalne narzędzie do badania separowalności stanów poprzez różnego rodzaju kryteria, czy to dla niższych wymiarów PPT czy bardziej uniwersalne świadka splątania. Dodatkowo dzięki badaniu struktury odwzorowań dodatnich jesteśmy w stanie powiedzieć coś o strukturze splątania [Kye12]. Istnieje wiele kryteriów badania splątania, tak jak kryterium realignmentu [Rud02, CW02], uogólnionego realignmentu [ACF03, ZZZG07], kryterium obrazu [Hor97] czy kryterium oparte o PPT symetryczne rozszerzanie stanu kwantowego [DPS04b, DPS02].

Przykład 3.26. Rozważmy stan maksymalnie splątany $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B$ z przestrzeni $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, kryterium uogólnionego realignmentu orzeka, że stan jest separowalny jeśli spełnione jest poniższa nierówność

$$\|\mathcal{R}(\rho_{AB} + u\rho_A \otimes \rho_B)\|_1 - \sqrt{(1 + u \operatorname{Tr} \rho_A^2)(1 + u \operatorname{Tr} \rho_B^2)} \leq 0, \tag{3.103}$$

gdzie ρ_A i ρ_B to zredukowane macierze gęstości stanu ρ_{AB} oraz $-1 \leq u \leq 1$. Wstawiając za stan ρ_{AB} stan maksymalnie splątany otrzymamy wynik $d-1$ co świadczy o tym, że faktycznie jest to stan splątany.

3.5 Znane konstrukcje

W tym dziale przedstawimy pewne znane klasy odwzorowań dodatnich, ich konstrukcje oraz przykłady a także przedyskutujemy dokładnie dwie znane konstrukcję odwzorowań dodatnich które stanowią silną motywację do wyników przedstawionych w rozdziale 4.

3.5.1 Konstrukcja Toshiyuki Takasaki i Jun Tomiyama

W tym rozdziale pracy przyjrzymy się dokładnie konstrukcji odwzorowań k-dodatnich zaproponowanych przez Toshiyuki Takahaskiego oraz Jun Tomiyame [TT83] których to metoda dowodzenia k-dodatniości odwzorowania będzie jedną z motywacji dla tej pracy. Wykorzystamy fakt, że k-dodatniość odwzorowania τ jest równoważna dodatniości

$$\langle \xi | (\mathbb{1} \otimes P) C_\tau (\mathbb{1} \otimes P) \xi \rangle \geq 0, \tag{3.104}$$

dla P będącego projektorem takim, że $\operatorname{Tr} P = k$.

Niech $\{|e_i\rangle\}$ będzie bazą w $\mathbb{C}^n$ natomiast niech $\{|f_i\rangle\}$ jest bazą w $\mathbb{C}^m$ gdzie $m \leq n$. Maksymalnie splątany wektor złożony z wektorów bazowych $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ będzie miał postać $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$ oraz niech $P_0 = |\psi_+\rangle \langle \psi_+|$ będzie projektorem rzutującym na $|\psi_+\rangle$. Rozważmy odwzorowanie liniowe $\tau : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ dla którego macierz Choi jest postaci $C_\tau = a - \lambda P_0$, gdzie $\lambda \geq 0, C_\tau \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ oraz $a \in \mathcal{B}((\mathbb{1}_m - P_0)(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)) = (\mathbb{1}_m - P_0)\mathcal{B}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)(\mathbb{1}_m - P_0)$ jest dodatnią odwracalną macierzą w podalgebrze $(\mathbb{1}_n \otimes P_0)\mathbb{M}_m(\mathbb{1}_n \otimes P_0)$.

Zauważmy, że zgodnie z Twierdzeniem 3.3

$$\begin{aligned} \langle \xi | (\mathbb{1} \otimes P) C_\tau (\mathbb{1} \otimes P) \xi \rangle &= \langle (\mathbb{1} \otimes P)\zeta | (\mathbb{1} \otimes P) C_\tau (\mathbb{1} \otimes P)(\mathbb{1} \otimes P)\zeta \rangle & (3.105) \\ &= \langle (\mathbb{1} \otimes P)\zeta | (\mathbb{1} \otimes P) C_\tau (\mathbb{1} \otimes P)\zeta \rangle & (3.106) \\ &= \langle \xi | C_\tau \xi \rangle, & (3.107) \end{aligned}$$

dla wektora $|\xi\rangle = (\mathbb{1} \otimes P)|\zeta\rangle$ gdzie $|\zeta\rangle \in \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{H}_n$ oraz projektora P, takiego, że $\operatorname{Tr}\{P\} = k$.

Lemat 3.27. *Dla projektorów P_1, P_2 działających na $\mathcal{H}$*

$$\|P_1 P_2 P_1\| = \|P_2 P_1 P_2\|. \tag{3.108}$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\|P_1 P_2 P_1\| = \left\| P_1 P_2 (P_1 P_2)^\dagger \right\| = \|(P_1 P_2)\|^2, \tag{3.109}$$

oraz

$$\|P_2 P_1 P_2\| = \left\| P_2 P_1 (P_2 P_1)^\dagger \right\| = \|(P_2 P_1)\|^2. \tag{3.110}$$

Dla każdego projektora mamy, że P spełnia $\left\|P^2\right\| = \left\|P^{\dagger 2}\right\| = \|P\|^2$, stąd

$$\left\|(P_1 P_2)^2\right\| = \left\|(P_1 P_2)^{\dagger 2}\right\| = \left\|(P_2 P_1)^2\right\|. \tag{3.111}$$

∎

Twierdzenie 3.28. *Odwzorowanie C_τ jest k-dodatnie jeśli $a \geq \frac{k\lambda}{m-k}(\mathbb{1} - P_0)$ i nie jest k-dodatnie jeśli $\|a\| < \frac{k\lambda}{m-k}$ dla $(1 \leq k \leq m-1)$.*

Dowód. Niech P będzie projektorem w $\mathbb{M}_m$ takim, że $\operatorname{Tr} P = k$, oraz niech P_0 jest 1-wymiarowym projektorem postaci $P_0 = \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^m e_{ij} \otimes f_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^m |e_i\rangle\langle e_j| \otimes |f_i\rangle\langle f_j|$ w algebrze $\mathbb{M}_m \otimes \mathbb{M}_n \simeq \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$. Obliczmy następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}
\|(\mathbb{1}\otimes P)P_0(\mathbb{1}\otimes P)\| &= \|P_0(\mathbb{1}\otimes P)P_0\| && (3.112)\\
&= \frac{1}{m^2}\left\|\sum_{i,j,k,l=1}^m (e_{ij}\otimes f_{ij})(\mathbb{1}\otimes P)(e_{kl}\otimes f_{kl})\right\| && (3.113)\\
&= \frac{1}{m^2}\left\|\sum_{i,j,k,l=1}^m e_{ij}e_{kl}\otimes f_{ij}Pf_{kl}\right\| && (3.114)\\
&= \frac{1}{m^2}\left\|\sum_{i,l=1}^m e_{il}\otimes \sum_{j=1}^m f_{ij}Pf_{jl}\right\| && (3.115)\\
&= \frac{1}{m^2}\left\|\sum_{i,l=1}^m e_{il}\otimes \sum_{j=1}^m |f_i\rangle\langle f_j|\,P\,|f_j\rangle\langle f_l|\right\| && (3.116)\\
&= \frac{1}{m^2}\left\|\sum_{j=1}^m \langle f_j|Pf_j\rangle \sum_{j,l=1}^m e_{il}\otimes f_{il}\right\| && (3.117)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \langle f_j|Pf_j\rangle\,\|P_0\| && (3.118)\\
&\leq \frac{1}{m}\operatorname{Tr} P = \frac{k}{m}. && (3.119)
\end{aligned}$$

Załóżmy, że $a \geq \frac{k\lambda}{m-k}(\mathbb{1} - P_0)$ i weźmy wektor jednostkowy $|\xi\rangle \in (\mathbb{1}\otimes P)\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{H}_n$, wtedy

$$
\begin{aligned}
\langle \xi | (\mathbb{1} \otimes P) C_\tau (\mathbb{1} \otimes P) \xi \rangle = \quad &= \langle \xi | (a - \lambda P_0) \xi \rangle && (3.120)\\
&= \langle \xi | a \xi \rangle - \lambda \langle \xi | P_0 \xi \rangle && (3.121)\\
&\geq \frac{k\lambda}{m-k} \langle \xi | (\mathbb{1} - P_0) \xi \rangle - \lambda \langle \xi | P_0 \xi \rangle && (3.122)\\
&= \frac{k\lambda}{m-k} \langle \xi | (\mathbb{1} - P_0) \xi \rangle - \lambda \langle \xi | P_0 \xi \rangle && (3.123)\\
&= \frac{k\lambda}{m-k} \underbrace{\langle \xi | \mathbb{1} \xi \rangle}_{1} - \frac{k\lambda}{m-k} \langle \xi | P_0 \xi \rangle - \lambda \langle \xi | P_0 \xi \rangle && (3.124)\\
&= \frac{k\lambda}{m-k} - \frac{k\lambda}{m-k} \langle \xi | P_0 \xi \rangle - \lambda \langle \xi | P_0 \xi \rangle && (3.125)\\
&= \frac{k\lambda}{m-k} - \langle \xi | P_0 \xi \rangle \left(\frac{k\lambda}{m-k} + \lambda \right) && (3.126)\\
&= \frac{k\lambda}{m-k} - \langle \xi | P_0 \xi \rangle \left(\frac{k\lambda}{m-k} + \frac{\lambda(m-k)}{m-k} \right) && (3.127)\\
&= \frac{k\lambda}{m-k} - \langle \xi | P_0 \xi \rangle \left(\frac{k\lambda + \lambda m - \lambda k}{m-k} \right) && (3.128)\\
&= \frac{k\lambda}{m-k} - \frac{m\lambda}{m-k} \langle \xi | P_0 \xi \rangle && (3.129)\\
&\geq \frac{k\lambda}{m-k} - \frac{k\lambda}{m-k} = 0. && (3.130)
\end{aligned}
$$

Załóżmy następnie, że $\|a\| < \frac{k\lambda}{m-k}$. Wybierzmy dodatnią liczbę taką, że $\frac{k\lambda}{m-k} - \epsilon > \|a\|$.

Niech $|\xi\rangle$ będzie wektorem jednostkowym takim jak wyżej, wtedy

$$\begin{aligned}
\langle\xi|(\mathbb{1}\otimes P)C_\tau(\mathbb{1}\otimes P)\xi\rangle &= \langle\xi|(a-\lambda P_0)\xi\rangle \\
&= \langle\xi|a\xi\rangle - \lambda\,\langle\xi|P_0\xi\rangle \\
&\leq \left(\frac{k\lambda}{m-k}-\epsilon\right)\langle\xi|P_0\xi\rangle - \lambda\,\langle\xi|P_0\xi\rangle \\
&= \left(\frac{k\lambda}{m-k}-\epsilon\right)(1-\langle\xi|P_0\xi\rangle) - \lambda\,\langle\xi|P_0\xi\rangle \\
&= \frac{k\lambda}{m-k}-\epsilon-\frac{k\lambda}{m-k}\langle\xi|P_0\xi\rangle - \epsilon\,\langle\xi|P_0\xi\rangle - \lambda\,\langle\xi|P_0\xi\rangle \\
&= \frac{k\lambda}{m-k}-\epsilon-\langle\xi|P_0\xi\rangle\left(\frac{k\lambda}{m-k}+\epsilon+\lambda\right) \\
&= \frac{k\lambda}{m-k}-\epsilon-\langle\xi|P_0\xi\rangle\left(\frac{-k\lambda+\epsilon(m-k)+\lambda(m-k)}{m-k}\right) \\
&= \frac{k\lambda}{m-k}-\epsilon-\langle\xi|P_0\xi\rangle\left(\frac{-k\lambda+\epsilon m-\epsilon k+\lambda m+\lambda k}{m-k}\right) \\
&= \frac{k\lambda}{m-k}-\epsilon-\frac{m\lambda-\epsilon(m-k)}{m-k}\,\langle\xi|P_0\xi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Ponieważ tutaj wybieramy wektor $|\xi\rangle$ taki, żeby $\langle\xi|P_0\xi\rangle = \frac{k}{m}$, przez co ostatni człon powyższego ciągu równości staje się postaci $-\epsilon+\frac{k}{m}\epsilon<0$. ■

Zauważmy, że odwzorowania 2-dodatnie otrzymane w ten sposób są rozkładalne, ponieważ

$$\begin{aligned}
C_\tau &= a-\lambda P_0 && (3.131)\\
&\geq \frac{2\lambda}{m-2}(\mathbb{1}-P_0)-\lambda P_0 && (3.132)\\
&= \frac{2\lambda}{m-2}\mathbb{1}-\left(\frac{2\lambda}{m-2}+\lambda\right)P_0 && (3.133)\\
&= \lambda\left(\frac{2}{m-2}\mathbb{1}-\frac{m}{m-2}P_0\right) && (3.134)\\
&= \frac{\lambda}{m-2}(2\mathbb{1}-mP_0) && (3.135)\\
&= \frac{\lambda}{m-2}(\mathbb{1}+\mathbb{1}-mP_0) && (3.136)\\
&= \frac{\lambda}{m-2}(C_{\phi_r}+C_{\phi_{\mathrm{Tr}}}), && (3.137)
\end{aligned}$$

gdzie operator $C_{\phi_r} = \mathbb{1} - mP_0$ jest określony dodatnio czyli odpowiadający odwzorowaniu całkowicie dodatniemu oraz $C_{\phi_{\mathrm{Tr}}} = \mathbb{1}$ jest kododatni i odpowiada odwzorowaniu całkowicie kododatniemu.

3.5.2 Konstrukcja Chruściński i Kossakowski

W tej części pracy skupimy się na bardzo istotnej konstrukcji odwzorowań k-dodatnich zaproponowaną przez Chruścińskiego-Kossakowskiego [CK09] opartą o rodzinę spektralnych warunków która stanowi pewną generalizację przykładu odwzorowania Choi które jest dodatnie a nie jest całkowicie dodatnie [Cho75b]. Zwróćmy uwagę, że klasa odwzorowań tutaj zaproponowana jest typu D, gdzie w pracy [HLP$^+$12] podano swoją charakteryzacje k-dodatniości tej klasy odwzorowań a w pracy [SS12] podano charakteryzację względem normy macierzy Choi tego odwzorowania.

Niech przestrzeń Hilberta składa się z dwóch podukładów $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ gdzie zbiór wektorów $\{|e_i\rangle\}$, dla $i = 1, \ldots, d_A$ jest bazą w $\mathcal{H}_A$ oraz $\{|f_j\rangle\}$, dla $j = 1, \ldots, d_B$ są wektorami bazowymi w $\mathcal{H}_B$. Rozważmy wektor na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ postaci

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} \phi_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle , \tag{3.138}$$

gdzie ϕ_{ij} są to w ogólności zespolone współczynniki. Wprowadźmy odwzorowanie $F : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$ następującej postaci

$$F |e_i\rangle = \sum_{j=1}^{d_B} \phi_{i\alpha} |f_\alpha\rangle . \tag{3.139}$$

Korzystając z (3.139) możemy przedstawić (3.138) w postaci

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} |e_i\rangle \otimes F |e_i\rangle . \tag{3.140}$$

Aby wektor postaci (3.140) był unormowany, musi zachodzić

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\Phi\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d_A} (\langle e_i| \otimes F^\dagger \langle e_i|)(|e_j\rangle \otimes F |e_j\rangle) && (3.141)\\
&= \sum_{i,j=1}^{d_A} \langle e_i|e_j\rangle \otimes F^\dagger |e_i\rangle \langle e_j| F && (3.142)\\
&= \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{\alpha,\beta=1}^{d_B} \langle e_i|e_i\rangle \otimes \phi^\dagger_{i\alpha}\phi_{j\beta} \langle f_\alpha|f_\beta\rangle && (3.143)\\
&= \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{\alpha=1}^{d_B} |\phi_{i\alpha}|^2 = 1, && (3.144)
\end{aligned}$$

czyli dostajemy warunek, że

$$\mathrm{Tr}\left(FF^\dagger\right) = 1. \tag{3.145}$$

Zatem możemy zbudować operator rzutu postaci

$$P = \sum_{i,j=1}^{d_A} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes F\,|e_i\rangle\langle e_j|\,F^\dagger. \tag{3.146}$$

Twierdzenie 3.29. *Rozważmy wektor $|Q\rangle = \mathbb{1} \otimes p$, gdzie p jest projektorem takim, że $\mathrm{Tr}\{p\} = k$, wtedy zachodzi następująca równość*

$$\|(\mathbb{1} \otimes p)P(\mathbb{1} \otimes p)\| = \mathrm{Tr}\left(pFF^\dagger\right). \tag{3.147}$$

Dowód. Zacznijmy od lewej strony równania (3.147) i skorzystajmy z faktu (3.27)

$$\begin{aligned}
\|(\mathbb{1} \otimes p)P(\mathbb{1} \otimes p)\| &= \|P(\mathbb{1} \otimes p)P\| \\
&= \left\| \sum_{i,j,k,l=1}^{d_A} (|e_i\rangle\langle e_j| \otimes F\,|e_i\rangle\,\langle e_j|\,F^\dagger)(\mathbb{1} \otimes p)(|e_k\rangle\langle e_l| \otimes F\,|e_k\rangle\,\langle e_l|\,F^\dagger) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i,j,k,l=1}^{d_A} |e_i\rangle\langle e_j|\,|e_k\rangle\langle e_l| \otimes F\,|e_i\rangle\,\langle e_j|\,F^\dagger pF\,|e_k\rangle\,\langle e_l|\,F^\dagger \right\| \\
&= \left\| \sum_{i,l=1}^{d_A} |e_i\rangle\langle e_l| \otimes \sum_{j=1}^{d_A} F\,|e_i\rangle\,\langle e_j|\,F^\dagger pF\,|e_j\rangle\,\langle e_l|\,F^\dagger \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{d_A} \left\langle e_j \middle| F^\dagger pFe_j \right\rangle \sum_{j,l=1}^{d_A} |e_i\rangle\langle e_l| \otimes F\,|e_i\rangle\,\langle e_l|\,F^\dagger \right\| \\
&= \sum_{j=1}^{d_A} \left\langle e_j \middle| F^\dagger pFe_j \right\rangle \|P\| \\
&= \mathrm{Tr}\left(pFF^\dagger\right).
\end{aligned}$$

■

Zwróćmy uwagę, że jeśli $F = V/\sqrt{d_A}$, gdzie V jest izometrią taką, że $VV^\dagger = \mathbb{1}_{d_B}$, wtedy P jest maksymalnie splątanym stanem postaci

$$P = \frac{1}{d_A} \sum_{i,j=1}^{d_A} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes V\,|e_i\rangle\langle e_j|\,V^\dagger. \tag{3.148}$$

Wstawiając (3.148) do ostatniej równości dowodu Twierdzenia 3.29, widzimy, że

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(pFF^\dagger\right) &= \frac{1}{d_A}\operatorname{Tr}\left(pVV^\dagger\right) && (3.149)\\
&= \frac{1}{d_A}\operatorname{Tr} p && (3.150)\\
&= \frac{k}{d_A} = \|F\|_k^2. && (3.151)
\end{aligned}$$

W ostatniej równości wykorzystaliśmy poniższy ciąg równości

$$\|a\|_k^2 = \max_{p:\operatorname{Tr} p=k} \langle a|a\rangle_p = \max_{p:\operatorname{Tr} p=k} \operatorname{Tr}\left(paa^\dagger\right). \tag{3.152}$$

Rozważmy odwzorowanie postaci $\phi(a) = \mathbb{1}\operatorname{Tr} a - \lambda F a F^\dagger$, którego macierz Choi jest postaci

$$C_\phi = a\mathbb{1} - \lambda P. \tag{3.153}$$

Twierdzenie 3.30. *Odwzorowanie ϕ którego macierz Choi jest postaci* (3.153) *jest k-dodatnie, jeśli $a \geq \Lambda(\mathbb{1} - P)$, gdzie $\Lambda \geq 0$.*

Dowód. Chcąc zbadać k-dodatniość odwzorowania ϕ musimy sprawdzić, czy $(\mathbb{1} \otimes p)C_\phi(\mathbb{1} \otimes p) \geq 0$, gdzie $\operatorname{Tr} p = k$. Zatem, weźmy wektor $|\xi\rangle \in (\mathbb{1} \otimes p)(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ i obliczmy następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi \middle| (\mathbb{1} \otimes p)C_\phi(\mathbb{1} \otimes p)\xi \right\rangle &= \langle \xi|(a - \lambda P)\xi\rangle && (3.154)\\
&\geq \Lambda\,\langle \xi|(\mathbb{1} - P)\xi\rangle - \lambda\,\langle \xi|P\xi\rangle && (3.155)\\
&= \Lambda - \Lambda\,\langle \xi|P\xi\rangle - \lambda\,\langle \xi|P\xi\rangle && (3.156)\\
&= \Lambda - (\Lambda + \lambda)\,\langle \xi|P\xi\rangle && (3.157)\\
&= \Lambda - (\Lambda + \lambda)\|F\|_k^2. && (3.158)
\end{aligned}$$

Aby odwzorowanie ϕ było k-dodatnie to z Twierdzenia 3.30 wynika, że $\Lambda - (\Lambda + \lambda)\|F\|_k^2 \geq 0$, zatem musi zachodzić

$$\Lambda \geq \frac{\lambda\|F\|_k^2}{1 - \|F\|_k^2}, \tag{3.159}$$

■

Czyli dostaliśmy odwzorowanie k-dodatnie z warunkiem, że $a \geq \frac{\lambda\|F\|_k^2}{1-\|F\|_k^2}(\mathbb{1} - P)$. Sprawdźmy, czy tak uzyskane odwzorowanie ϕ jest rozkładalne.

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}-\lambda P &\geq \frac{\lambda\|F\|_k^2}{1-\delta}(\mathbb{1}-P)-\lambda P && (3.160)\\
&= \lambda\left(\frac{\|F\|_k^2}{1-\|F\|_k^2}\mathbb{1}-\left(\frac{\|F\|_k^2}{1-\|F\|_k^2}+1\right)P\right) && (3.161)\\
&= \lambda\left(\frac{\|F\|_k^2}{1-\|F\|_k^2}\mathbb{1}-\frac{1}{1-\|F\|_k^2}P\right) && (3.162)\\
&= \frac{\lambda\|F\|_k^2}{1-\|F\|_k^2}\left(\mathbb{1}-\frac{1}{\|F\|_k^2}P\right) && (3.163)\\
&= \frac{\lambda\|F\|_k^2}{1-\|F\|_k^2}\frac{1}{\|F\|_k^2}\left(\frac{k}{d_A}\mathbb{1}-P\right). && (3.164)
\end{aligned}$$

Ponieważ interesują nas jedynie odwzorowania 2-dodatnie, wtedy

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}-\lambda P &= \frac{\lambda\|F\|_2^2}{1-\|F\|_2^2}\frac{1}{\|F\|_2^2}\left(\frac{2}{d_A}\mathbb{1}-P\right) && (3.165)\\
&= \frac{\lambda\|F\|_2^2}{1-\|F\|_2^2}\frac{1}{\|F\|_2^2 d_A}(2\mathbb{1}-P) && (3.166)\\
&= \frac{\lambda\|F\|_2^2}{1-\|F\|_2^2}\frac{1}{\|F\|_2^2 d_A}(\mathbb{1}+\mathbb{1}-P) && (3.167)\\
&= \frac{\lambda\|F\|_2^2}{1-\|F\|_2^2}\frac{1}{\|F\|_2^2 d_A}(\underbrace{C_{\phi_r}}_{CP}+\underbrace{C_{\phi_{\mathrm{Tr}}}}_{koCP}). && (3.168)
\end{aligned}$$

Zatem uzyskane w ten sposób odwzorowania są rozkładalne.

W pracy [CK09] rozważany jest przykład odwzorowania $\phi_\lambda : \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$ które jest pewną generalizacją odwzorowania Choi, mianowicie

$$\phi_\lambda(X) := \mathrm{Tr}(X)\mathbb{1} - \lambda\sum_{\alpha=1}^{m} F_\alpha X F_\alpha^\dagger, \tag{3.169}$$

dla którego odpowiadająca macierz Choi ma postać $C_{\phi_\lambda} = \mathbb{1} - \lambda P$, gdzie P to projektor postaci (3.148). Odwzorowanie (3.169) jest k-dodatnie wtedy gdy spełniona jest nierówność

$$\lambda \leq \frac{1}{f_k}, \tag{3.170}$$

gdzie $f_k = \sum_{\alpha=1}^{m-1}\|F_\alpha\|_k^2$ przy założeniu, że $f_k \leq 1$. Widać zatem, że dostajemy pewną rodzinę odwzorowań k-dodatnich, można więc zadać pytanie, czy da się w ten sposób zbudować takie odwzorowanie ϕ_λ które posiada dwie ujemne wartości własne λ_1 i λ_2.

Rozważmy odwzorowanie $\phi : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_4$ gdzie macierz Choi tego odwzorowania jest postaci $C_\phi = a - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2$, gdzie P_i są to projektory 1-wymiarowe postaci $P_i = \sum_{i,j=1}^{3} e_{i,j} \otimes F_i e_{ij} F_i^\dagger$ oraz $F_i : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$. Sprawdźmy, czy C_ϕ jest k-dodatnie, używając Twierdzenia 3.30.

$$\begin{aligned}\left\langle \xi \middle| (\mathbb{1} \otimes P) C_\phi (\mathbb{1} \otimes P) \xi \right\rangle &= \langle \xi | (a - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2) \xi \rangle &(3.171)\\ &\geq \Lambda \langle \xi | (\mathbb{1} - P) \xi \rangle - \lambda_1 \langle \xi | P_1 \xi \rangle - \lambda_2 \langle \xi | P_2 \xi \rangle &(3.172)\\ &= \Lambda - \Lambda \langle \xi | P \xi \rangle - \lambda_1 \langle \xi | P_1 \xi \rangle - \lambda_2 \langle \xi | P_2 \xi \rangle &(3.173)\\ &= \Lambda - (\Lambda + \lambda_1) \|F_1\|_2^2 - (\Lambda + \lambda_2) \|F_2\|_2^2, &(3.174)\end{aligned}$$

Aby odwzorowanie było dodatnie musi zatem zachodzić tak jak wcześniej

$$\Lambda - (\Lambda + \lambda_1) \|F_1\|_2^2 - (\Lambda + \lambda_2) \|F_2\|_2^2 \geq 0, \tag{3.175}$$

co więcej, autorzy [CK09] zakładają, że $\sum_{i=1}^{2} \|F_i\|_2^2 < 1$ w związku z czym jeśli odwzorowanie to będzie k-dodatnie jeśli będzie zachodzić $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} \|F_i\|}$.

Przykład 3.31. Załóżmy odwzorowanie postaci $\phi : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_4$ gdzie macierz Choi tego odwzorowania jest postaci $C_\phi = a - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2$, gdzie P_i są to projektory 1-wymiarowe postaci $\mathbb{M}_3(\mathbb{M}_4) \ni P_i = |\xi_i\rangle \langle \xi_i|$ z tym, że $\operatorname{Tr} P = \operatorname{Tr}(P_1 + P_2) = 2$. Dodatkowo załóżmy, że wektory $|\xi_i\rangle$ są zdefiniowane następująco $|\xi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{3} |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle$, $|\xi_2\rangle = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{3}} |e_i\rangle \otimes |f_{i+1}\rangle$. Ponieważ $\|(\mathbb{1} \otimes p) P_i (\mathbb{1} \otimes p)\| = \frac{2}{3}$ widzimy, że

$$\begin{aligned}\Lambda - (\Lambda + \lambda_1) \langle \xi | P_1 \xi \rangle - (\Lambda + \lambda_2) \langle \xi | P_2 \xi \rangle &= \Lambda - (\Lambda + \lambda_1) \frac{2}{3} - (\Lambda + \lambda_2) \frac{2}{3}\\ &= \Lambda - \frac{4}{3}\Lambda - \frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2),\end{aligned}$$

czyli dostajemy, że

$$-\frac{1}{3}\Lambda \geq \frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2). \tag{3.176}$$

Widzimy zatem, że tą metodą nie otrzymamy odwzorowania 2-dodatniego dla odwzorowania, którego macierz Choi jest postaci $C_\phi = a - \lambda_1 P_1 - \lambda_2 P_2$.

Rozdział 4

Konstrukcja odwzorowań k-dodatnich

W tej części pracy przedstawimy główny wynik tej pracy przedstawiający metodę charakteryzacji odwzorowań ze względu na nieujemny parametr μ_k którego wartość będzie determinowała k-dodatniość odwzorowania.

4.1 Odwzorowania dodatnie i ich przedstawienie

W [Stø10, JK10] pokazano, że z każdym odwzorowaniem dodatnim $\Phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ możemy stowarzyszyć nowe odwzorowanie $\Psi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ o szczególnej postaci

$$\Psi(X) = \mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_n - \Psi_{CP}, \tag{4.1}$$

gdzie Ψ_{CP} jest odwzorowaniem całkowicie dodatnim stowarzyszonym z odwzorowaniem Φ. Odwzorowania w postaci (4.1) są scharakteryzowane przy pomocy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.1 (Størmer)**.** *Niech $\Phi : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ będzie odwzorowaniem liniowym, wtedy*

1. *Φ jest k-dodatnie wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_{|x\rangle \in SR(|x\rangle) \leq k, \|x\|=1} \langle x| C_{\Psi_{CP}} |x\rangle \leq 1$.*

2. *Niech $k < \min\{m, n\}$ i istnieje wektor jednostkowy $|y\rangle = \sum_{i=1}^{k} |x_i\rangle \otimes |y_i\rangle$ z $SR(|y\rangle)$ taki, że $|y\rangle \perp C_\Phi |y\rangle \notin X \otimes Y$, gdzie $X = span(|x_i\rangle) = \mathbb{C}^m$, $Y = span(|y_i\rangle) = \mathbb{C}^n$. Wtedy Φ nie jest $(k+1)$-dodatnie.*

Przykład 4.2. Rozważmy odwzorowanie Choi $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^3), \mathcal{B}(\mathbb{C}^3))$ [Cho75b]. Zdefiniujmy wektor $|y\rangle = |x\rangle \otimes |x\rangle$, gdzie $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \in \mathbb{C}^3$, wtedy widzimy, że $\langle C_\phi y | y \rangle = \langle C_{T\circ\phi} y | y \rangle = 0$, gdzie $C_{T\circ\phi} = (\mathrm{id} \otimes T) C_\phi$. Zauważmy dodatkowo, że $C_\phi |y\rangle \neq 0 \neq C_{T\circ\phi} |y\rangle$. Wykorzystując Twierdzenie (4.1) stwierdzamy zatem, że odwzorowanie ϕ oraz $T \circ \phi$ nie są 2-dodatnie co oznacza, że ϕ nie jest dodatnie oraz nie jest 2-kododatnie.

Twierdzenia (4.1) jest szczególnie ważne z punktu widzenia tej pracy, ponieważ zaprezentowana przez nas metoda badania k-dodatniości odwzorowań, wykorzystuje fakt, że każde odwzorowanie dodatnie można przedstawić w postaci (4.1). Idąc dalej, wiemy, że każde odwzorowanie całkowicie dodatnie ma swoją reprezentację Choia-Krausa-Stinespringa. Z wyników pracy [TT83] wiemy, że sprawdzanie k-dodatniości jest równoważne ze sprawdzeniem równości (3.104). Co więcej, jeśli zmodyfikujemy odwzorowanie o postaci (4.1) dokładając nieujemny parametr $\mu \in \mathbb{R}_+$ w następujący sposób

$$\Psi_\mu(X) = \mu \operatorname{Tr}(X)\mathbb{1}_n - \Psi_{CP}, \tag{4.2}$$

to warunek (1) z Twierdzenia (4.1) zmieni się. Odwzorowanie Ψ_μ będzie k-dodatnie wtedy i tylko wtedy gdy

$$\sup_{|x\rangle \in SR(|x\rangle) \leq k, \|x\|=1} \langle x| C_{\Psi_{CP}} |x\rangle \leq \mu. \tag{4.3}$$

Przykład 4.3. Rozważmy uogólnione odwzorowanie Choi $\phi_{[a_1,a_2,a_3]} \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^3), \mathcal{B}(\mathbb{C}^3))$ [CKL92] z przykładu 3.8 i załóżmy, że parametry a_1, a_2, a_3 spełniają nierówności które gwarantują, że odwzorowanie to jest dodatnie. Wtedy w związku z powyższym możemy je zapisać w postaci

$$\phi_{[a_1,a_2,a_3]} \mapsto \psi = \lambda \operatorname{Tr} - \psi_{CP}, \tag{4.4}$$

dla $X = (x_{ij}) \in \mathbb{M}_3$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz odwzorowanie ψ_{CP} jest postaci

$$\psi_{CP}(X) = diag\left(\lambda_0 \sum_{i=1}^{3} x_{ii} - \sum_{j=1}^{3} a_j x_{j+k,j+k}\right)_{k=0,1,2} + X, \tag{4.5}$$

gdzie parametr λ_0 jest tak dobrany, aby odwzorowanie to było całkowicie dodatnie. Nowe odwzorowanie ψ ma zatem postać

$$\psi = \operatorname{Tr} - \psi_{CP} = \phi_{[a_1,a_2,a_3]} - (\lambda_0 - \lambda) \operatorname{Tr}, \tag{4.6}$$

gdzie $\lambda > \lambda$. Dla odpowiedniego λ_0 gwarantującego całkowitą dodatniość odwzorowania ψ_{CP} możemy znaleźć operatory Krausa

$$\psi_{CP}(X) = \sum_{i=1}^{10} K_i X K_i^\dagger, \tag{4.7}$$

gdzie operatory Krausa są zdefiniowane następująco

$$K_0 = \mathbb{1}_3, \tag{4.8}$$
$$K_i = \sqrt{\lambda_0 - a_1}\, |e_i\rangle\langle e_i| \quad \text{dla } i = 1,2,3, \tag{4.9}$$
$$K_i = \sqrt{\lambda_0 - a_2}\, |e_i\rangle\langle e_{i+1}| \quad \text{dla } i = 4,5,6, \tag{4.10}$$
$$K_i = \sqrt{\lambda_0 - a_3}\, |e_i\rangle\langle e_{i+2}| \quad \text{dla } i = 7,8,9, \tag{4.11}$$

gdzie dla operatorów $|e_i\rangle\langle e_{i+j}| \in \mathbb{M}_3$ gdzie sumowanie po indeksie j rozumiemy, jako mod 3.

Przykład 4.4. Rozważmy odwzorowanie Millera-Olkiewicza zaproponowane w pracy [MO14].

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_{11}+x_{22}) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{13} \\ 0 & \frac{1}{2}(x_{11}+x_{22}) & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{32} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_{31} & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Jest to przykład odwzorowania dodatniego nierozkładalnego co więcej jest ono eksponowane w stożku odwzorowań dodatnich. Odwzorowanie (4.12) możemy przepisać w postaci $\phi_\lambda = \lambda \operatorname{Tr} - \psi_{CP}$ gdzie $\psi_{CP}(X) = \sum_{i=1}^{13} K_i X K_i^\dagger$ posiada następujący rozkład na operatory Krausa

$$K_1 = \sqrt{\lambda_0 - \frac{1}{2} - \sqrt{2}}\,|e_1\rangle\langle e_1|\,, \tag{4.13}$$

$$K_2 = \sqrt{\lambda_0 - \frac{1}{2}}\,|e_1\rangle\langle e_2|\,, \tag{4.14}$$

$$K_3 = \sqrt{\lambda_0 - \frac{1}{2}}\,|e_2\rangle\langle e_1|\,, \tag{4.15}$$

$$K_4 = \sqrt{\lambda_0 - 2^{-\frac{3}{2}} - \sqrt{2}}\,|e_2\rangle\langle e_2|\,, \tag{4.16}$$

$$K_5 = \sqrt{\lambda_0}\,|e_1\rangle\langle e_3|\,, \tag{4.17}$$

$$K_6 = \sqrt{\lambda_0} - 2^{-\frac{1}{2}}\,|e_2\rangle\langle e_3|\,, \tag{4.18}$$

$$K_7 = \sqrt{\lambda_0 - 1 - \sqrt{2}}\,|e_3\rangle\langle e_3|\,, \tag{4.19}$$

$$K_8 = 2^{-\frac{1}{4}}\mathbb{1}_3, \tag{4.20}$$

$$K_9 = 2^{-\frac{1}{4}}\Big(|e_1\rangle\langle e_1| - |e_2\rangle\langle e_2|\Big), \tag{4.21}$$

$$K_{10} = 2^{-\frac{1}{4}}\Big(|e_2\rangle\langle e_2| - |e_3\rangle\langle e_3|\Big), \tag{4.22}$$

$$K_{11} = 2^{-\frac{1}{4}}\Big(|e_2\rangle\langle e_3| + |e_3\rangle\langle e_2|\Big), \tag{4.23}$$

$$K_{12} = \sqrt{\lambda_0 - 2^{-\frac{1}{2}}}\,|e_3\rangle\langle e_2|\,, \tag{4.24}$$

$$K_{13} = \sqrt{\lambda_0}\,|e_3\rangle\langle e_1|\,. \tag{4.25}$$

Parametr λ_0 dobierany jest tak, aby pierwiastki z operatorów Krausa były nieujemne. Zauważmy, że odzyskujemy oryginalne odwzorowanie ϕ Millera-Olkiewicza dla $\lambda = \lambda_0$. Odwzorowanie zaczyna być 2-dodatnie i całkowicie dodatnie dla parametru $\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Aby to zweryfikować, załóżmy, że $Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_3)$ będzie następującej postaci

$$Y = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \geq 0. \tag{4.26}$$

Zgodnie z definicją 2-dodatniości

$$\phi_\lambda^{(2)} = (\phi_\lambda \otimes \mathrm{id}_2)(Y) \tag{4.27}$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_\lambda(e_{33}) & \phi_\lambda(e_{32}) \\ \phi_\lambda(e_{23}) & \phi_\lambda(e_{22}) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cdot & \cdot & 1+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}+\lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}+\lambda & \cdot \\ \cdot & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \end{array}\right], \tag{4.28}$$

macierz ta jest dodatnio określona, gdy $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ zatem dla $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$ odwzorowanie ϕ_λ nie jest 2-dodatnie. Natomiast całkowitą dodatniość udowodnimy wykorzystując macierz Choi odwzorowania ϕ_λ

$$C_{\phi_\lambda} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{1}{2}+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cdot & \frac{1}{2}+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & t & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t & \cdot & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & t & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdot & t & \cdot \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+\lambda \end{array}\right], \tag{4.29}$$

Minor zewnętrzny $(\frac{1}{2}+\lambda)(1+\lambda) - \frac{1}{2} = \lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda \geq 0$ dla $\lambda \geq 0$ oraz drugi wewnętrzny minor $\lambda^2 - \frac{1}{2} \geq 0$ dla $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zatem dla $t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ macierz Choi C_{ϕ_λ} jest dodatnio określona czyli ϕ_λ jest całkowicie dodatnie.

4.2 Charakteryzacja odwzorowań

Zmotywowani przez prace [CK09, TT83, Stø10] przedstawimy metodę weryfikacji k-dodatniości przy użyciu parametru μ. dla wszystkich odwzorowań dodatnich postaci $\mu \operatorname{Tr} - \psi_{CP}$, gdzie wymagamy tylko, aby odwzorowanie całkowicie dodatnie ψ_{CP} było zapisane w reprezentacji CKS z operatorami Krausa.

Niech $m, n \in \mathbb{N}$, zdefiniujmy operator liniowy $K_\alpha : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, posiadający własność ortogonalności $\operatorname{Tr}(K_\alpha^\dagger K_\beta) = 0$ dla $\alpha \neq \beta$. Dla zadanego systemu operatorowego K_α rozważmy jednoparametrową rodzinę odwzorowań liniowych $\Phi_\mu : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ która jest ogólnej postaci

$$\Phi_\mu(X) = \mu \operatorname{Tr}(X) \mathbb{1}_n - \sum_{\alpha=1}^{N} K_\alpha X K_\alpha^\dagger, \tag{4.30}$$

gdzie $X \in \mathbb{M}_m$ oraz μ jest dowolną liczbą dodatnią.

Naszym celem będzie zbadanie zakresu liczby μ tak aby odwzorowanie Φ_μ było k-dodatnie dla $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że macierz Choi C_μ odpowiadająca odwzorowaniu Φ_μ ma postać $C_\mu = \mu \mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C$, gdzie

$$C = \sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes \sum_{\alpha=1}^{N} K_\alpha e_{ij} K_\alpha^\dagger \tag{4.31}$$

Zdefiniujmy parametr

$$\mu_k = \sup\{\|(\mathbb{1}_m \otimes Q)C(\mathbb{1}_m \otimes Q)\| : Q \in \mathrm{Proj}_k(\mathbb{C}^n)\}, \tag{4.32}$$

gdzie $Proj_k(\mathbb{C}^n)$ oznacza n-wymiarowy projektor rzędu k.

Stwierdzenie 4.5. *Odwzorowanie Φ_μ zdefiniowane w równaniu* (4.30) *jest k-dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \geq \mu_k$.*

Dowód. Załóżmy, że $\mu \geq \mu_k$. Wtedy zgodnie z [TT83, Prop. 1.1] wystarczy pokazać, że $(\mathbb{1}_m \otimes Q)C_a(\mathbb{1}_m \otimes Q)$ jest dodatnie dla każdego $Q \in \mathrm{Proj}_k(\mathbb{C}^n)$. Niech wektor $|\xi\rangle \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ będzie unormowany, czyli $\|\xi\| = 1$. Załóżmy dodatkowo, że $|\xi\rangle \in (\mathbb{1}_m \otimes Q)(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\big\langle \xi \big| (\mathbb{1}_m \otimes Q) C_\mu (\mathbb{1}_m \otimes Q) \xi \big\rangle &= && (4.33)\\
&= \mu \|(\mathbb{1}_m \otimes Q)\xi\|^2 - \langle \xi | (\mathbb{1}_m \otimes Q) C (\mathbb{1}_m \otimes Q) \xi \rangle && (4.34)\\
&\geq \mu_k - \|(\mathbb{1}_m \otimes Q) C (\mathbb{1}_m \otimes Q)\|) \geq 0, && (4.35)
\end{aligned}$$

gdzie ostatnią równość dostaliśmy z równości (4.32). Czyli dostaliśmy, że odwzorowanie jest k-dodatnie.

Załóżmy teraz odwrotnie, że $\mu < \mu_k$. Z definicji o supremum wynika wtedy, że istnieje projektor $Q \in \mathrm{Proj}_k(\mathbb{C}^n)$ oraz wektor jednostkowy $|\xi\rangle \in (\mathbb{1}_m \otimes Q)(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$ takie, że zachodzi $\mu < \langle \xi | (\mathbb{1}_m \otimes Q) C_\mu (\mathbb{1}_m \otimes Q) |\xi\rangle$. W związku z czym możemy dalej napisać

$$\begin{aligned}
\langle \xi | (\mathbb{1}_m \otimes Q) C_\mu (\mathbb{1}_m \otimes Q) |\xi\rangle &= && (4.36)\\
&= \mu - \langle \xi | (\mathbb{1}_m \otimes Q) C (\mathbb{1}_m \otimes Q) |\xi\rangle < 0 && (4.37)
\end{aligned}$$

co pokazuje, że odwzorowanie Φ_μ nie jest k-dodatnie. ■

Możemy teraz sformułować nasze główne twierdzenie, które określa dolną granicę parametru μ dla którego odwzorowanie Φ_μ jest k-dodatnie.

Twierdzenie 4.6. *Załóżmy, że $\Phi_\mu : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ jest postaci (4.30). Jest ono k-dodatnie, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mu \geq \sup_\zeta \left\| \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \zeta_\alpha K_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^{N} \zeta_\beta K_\beta \right)^\dagger \right\|_{(k)}, \tag{4.38}$$

gdzie supremum jest liczone po wszystkich wektorach $|\zeta\rangle = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N)^T \in \mathbb{C}^N$ takich, że $\|\zeta\| = 1$ oraz $\|\cdot\|_{(k)}$ oznacza k-tą normę Ky-Fana.

Dowód. Pokażemy, że parametr μ_k zdefiniowane w (4.32) jest równy prawej strony równania (4.38). Zdefiniujmy operator $C = \sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes \sum_{\alpha=1}^{N} K_\alpha e_{ij} K_\alpha^\dagger \in \mathbb{M}_m \otimes \mathbb{M}_n \subset \mathbb{M}_m \otimes \mathbb{M}_N \otimes \mathbb{M}_n \simeq \mathbb{M}_m \otimes \mathbb{M}_N(\mathbb{M}_n)$ gdzie mamy na myśli następujące włożenie

$$X \otimes Y \mapsto X \otimes \begin{pmatrix} Y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Zauważmy, że tak zdefiniowane włożenie jest izometrią. Zdefiniujmy jeszcze $\mathbf{K}$, $\mathbf{e}_{ij}$ oraz $\mathbf{Q}$ jako

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & \cdots & V_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbb{1}_N \otimes e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{ij} \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbb{1}_N \otimes Q = \begin{pmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Tak jak wcześniej, policzmy teraz normę operatora C_μ obłożonego przez $(\mathbb{1} \otimes Q)$, zatem

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathbb{1}_m \otimes Q) C_\mu (\mathbb{1}_m \otimes Q)\right\| = && (4.43)\\
&= \left\|(\mathbb{1}_m \otimes Q)\left(\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes \sum_{\alpha=1}^{N} K_\alpha e_{ij} K_\alpha^\dagger\right)(\mathbb{1}_m \otimes Q)\right\| && (4.44)\\
&= \left\|\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes \sum_{\alpha=1}^{N} Q K_\alpha e_{ij} K_\alpha^\dagger Q\right\| && (4.45)\\
&= \left\|\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=0}^{r} Q K_\alpha e_{ij} K_\alpha^\dagger Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\| && (4.46)\\
&= \left\|\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{e}_{ij}\mathbf{K}^\dagger\mathbf{Q}\right\| && (4.47)\\
&= m\left\|(\mathbb{1}_m \otimes \mathbf{Q}\mathbf{K})\left(\frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ij}\right)\left(\mathbb{1}_m \otimes \mathbf{K}^\dagger\mathbf{Q}\right)\right\|. && (4.48)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że operator w środkowym nawiasie jest projektorem, w związku z czym

$$\|(\mathbb{1}_m \otimes Q)C(\mathbb{1}_m \otimes Q)\| = \tag{4.49}$$

$$= m\left\|\left(\frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij}\otimes \mathbf{e}_{ij}\right)\left(\mathbb{1}_m \otimes \mathbf{K}^\dagger \mathbf{Q}\mathbf{K}\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij}\otimes \mathbf{e}_{ij}\right)\right\|. \tag{4.50}$$

Zdefiniujmy sobie system macierzy$\{h_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{N}$ żyjący w $\mathbb{M}_N(\mathbb{C})$. Zauważmy, że definiując operatory bazowe rozszerzone w następujący sposób $\mathbf{e}_{ij} = \mathbb{1}_N \otimes e_{ij}$, również stanowią bazę macierzową, w związku z czym

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbb{1}_m \otimes Q)C(\mathbb{1}_m \otimes Q)\| = \\
&= m\left\|\left(\frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij}\otimes \mathbb{1}_N \otimes e_{ij}\right)\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \mathbb{1}_m \otimes h_{\alpha\beta}\otimes K_\alpha^\dagger Q K_\beta\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij}\otimes \mathbb{1}_N \otimes e_{ij}\right)\right\| \\
&= m\left\|\frac{1}{m^2}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} e_{ij}\otimes h_{\alpha\beta}\otimes \mathrm{Tr}\left(K_\alpha^\dagger Q K_\beta\right) e_{ij}\right\|
\end{aligned}$$

$$= \left\|\left(\frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m} e_{ij}\otimes \mathbf{e}_{ij}\right)\left(\mathbb{1}_m \otimes \left(\mathrm{Tr}\, K_\alpha^\dagger Q K_\beta\right)_{\alpha,\beta}\otimes \mathbb{1}_m\right)\right\| \tag{4.51}$$

$$= \left\|\left(\mathrm{Tr}\, K_\alpha^\dagger Q K_\beta\right)_{\alpha,\beta}\right\|. \tag{4.52}$$

Powyższa macierz $(\mathrm{Tr}\{K_\alpha^\dagger Q K_\beta\})_{\alpha,\beta=1,\ldots,N}$ jest samosprzężonym elementem w $\mathbb{M}_N(\mathbb{C})$. Ostatnią równość pomiędzy (4.51) a (4.52) otrzymaliśmy ponieważ pierwszy i drugi wyraz w (4.51) żyją odpowiednio na $\mathbb{M}_m \otimes \mathbb{1}_N \otimes \mathbb{M}_m$ i $\mathbb{1}_m \otimes \mathbb{M}_N \otimes \mathbb{1}_m$ oraz norma na produkcie tensorowym operatorów spełnia tak zwany, cross-norm. Zauważmy dalej, że $\mathrm{Tr}(K_\alpha^\dagger Q K_\beta) = \mathrm{Tr}(K_\alpha^\dagger Q Q^\dagger K_\beta) = \mathrm{Tr}(Q K_\beta K_\alpha^\dagger Q)$ dla każdego α, β. Wiec

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\mathrm{Tr}\, Q K_\beta K_\alpha^\dagger Q\right)_{\alpha,\beta}\right\| &= \sup\left\{\left|\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\overline{\zeta_\alpha}\zeta_\beta\, \mathrm{Tr}\, Q K_\beta K_\alpha^\dagger Q\right| : |\zeta\rangle = (\zeta_1,\ldots,\zeta_N)^T \in \mathbb{C}^N,\ \|\zeta\| \le 1\right\} \\
&= \sup_\zeta \left|\mathrm{Tr}\left(Q\left(\sum_{\beta=1}^{N}\zeta_\beta K_\beta\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\zeta_\alpha K_\alpha\right)^\dagger Q\right)\right|.
\end{aligned}$$

W końcu, zgodnie z równaniem (4.32) dostajemy, że

$$\mu_k = \sup_{Q\in \mathrm{Proj_k}(\mathbb{C}^n)} \sup_\zeta \left|\mathrm{Tr}\left(Q\left(\sum_{\beta=1}^{N}\zeta_\beta K_\beta\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\zeta_\alpha K_\alpha\right)^\dagger Q\right)\right| \tag{4.53}$$

$$= \sup_\zeta \sup_Q \left|\mathrm{Tr}\left(Q\left(\sum_{\beta=1}^{N}\zeta_\beta K_\beta\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\zeta_\alpha K_\alpha\right)^\dagger Q\right)\right| \tag{4.54}$$

$$= \sup_\zeta \left\|\left(\sum_{\beta=1}^{N}\zeta_\beta K_\beta\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\zeta_\alpha K_\alpha\right)^\dagger\right\|_{(k)}. \tag{4.55}$$

Co kończy dowód. ■

Stwierdzenie 4.7. *Jeśli $m, n \in \mathbb{N}$ są takie, że $2 \leq m \leq n$ to wtedy $\mu_k < \mu_{k+1}$ dla $k = 1, \ldots, m-1$.*

Dowód. Rozważmy wektor $|\zeta\rangle \in \mathbb{C}^N$ zdefiniowany jako $V(\zeta) = \sum_{\alpha=1}^N \zeta_\alpha V_\alpha$. Na początek pokażemy, że $\|V(\zeta)V(\zeta)^\dagger\|_{(k)} < \|V(\zeta)V(\zeta)^\dagger\|_{(k+1)}$ dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$, gdy $\|\zeta\| = 1$. Zauważmy, że $V(\zeta) = (v_{pq}(\zeta))_{1 \leq p \leq n; 1 \leq q \leq m}$ gdzie

$$v_{pq}(\zeta) = \begin{cases} \zeta_{p-q}, & \text{jeśli } 1 \leq p-q \leq N \\ 0, & \text{w przeciwny razie.} \end{cases} \tag{4.56}$$

Niech $\tilde{\alpha} = \min\{\alpha \in \{1, \ldots, N\} : \zeta_\alpha \neq 0\}$. Wtedy podmacierz $(v_{p,q}(\zeta))_{\tilde{\alpha}+1 \leq p \leq \tilde{\alpha}+m; 1 \leq q \leq m}$ wymiaru $m \times m$ ma dolno-trójkątną postać

$$\begin{bmatrix} \zeta_{\tilde{\alpha}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & \zeta_{\tilde{\alpha}} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \ddots & \ddots & \zeta_{\tilde{\alpha}} & 0 \\ * & * & \cdots & * & \zeta_{\tilde{\alpha}} \end{bmatrix}. \tag{4.57}$$

Wynika stąd, że $V(\zeta)$ ma rząd m, co w konsekwencji oznacza, że macierz $V(\zeta)V(\zeta)^\dagger$ też ma rząd m. To oznacza, że macierz $V(\zeta)V(\zeta)^\dagger$ posiada m ściśle dodatnich wartości własnych co prowadzi do silnej nierówności między normami Ky-Fana.

Załóżmy teraz, że $\mu_k = \mu_{k+1}$ dla pewnego $k = 1, \ldots, m-1$. Niech $|\tilde{\zeta}\rangle \in \mathbb{C}^N$ będzie wektorem jednostkowym takim, że $\mu_k = \|V(\tilde{\zeta})V(\tilde{\zeta})^\dagger\|_{(k)}$. Istnienie takiego wektora wynika ze zwartości zbiorów wszystkich wektorów jednostkowych żyjących na $\mathbb{C}^N$. Stąd wynika, że $\mu_{k+1} = \mu_k = \|V(\tilde{\zeta})V(\tilde{\zeta})^\dagger\|_{(k)} < \|V(\tilde{\zeta})V(\tilde{\zeta})^\dagger\|_{(k+1)}$, co prowadzi do sprzeczności, ponieważ μ_{k+1} jest zdefiniowane jako supremum $k+1$ normy Ky-Fana po wszystkich wektorach jednostkowych $|\zeta\rangle$. ■

4.3 Jednoparametrowa rodzina odwzorowań Φ_μ

Rozważmy odwzorowanie $\Phi_\mu : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ postaci

$$\Phi_\mu(X) = \mu \operatorname{Tr}(X) \mathbb{1}_n - \sum_{\alpha=0}^{r} V_\alpha X V_\alpha^\dagger, \tag{4.58}$$

gdzie $V : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ jest izometrią postaci $V_\alpha |e_i\rangle = |f_{i+\alpha}\rangle$ dla wektorów bazowych w $|e_i\rangle \in \mathbb{C}^m$ oraz $|f_i\rangle \in \mathbb{C}^n$ odpowiednio.

Stwierdzenie 4.8. *Odwzorowanie $\Phi_\mu : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ dla $n \geq m$ postaci* (4.58) *jest k-dodatnie i rozkładalne, jeśli $\mu \geq \mu_k \geq r+1$ dla $r = n - m$.*

Dowód. Z Propozycji (4.5) wiemy, że odwzorowanie Φ_μ jest k-dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \geq \mu_k$. Zatem

$$C_\mu = \mu \mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C \tag{4.59}$$

$$\geq \mu_k \mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C \tag{4.60}$$

$$\geq (r+1)\mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C \tag{4.61}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{r} \Big(\mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C_\alpha \Big), \tag{4.62}$$

gdzie $C_\alpha = \sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes V_\alpha e_{ij} V_\alpha^\dagger$. Operator $(\mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C_\alpha)^\Gamma$ jest dodatnio określona dla wszystkich α, co więcej $\sum_{\alpha=0}^{r}(\mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C_\alpha)$ jest dodatnio określony. Możemy zatem napisać, rozkład C_μ na część całkowicie dodatnią i całkowicie kododatnia

$$C_\mu = \Big((\mu \mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C) - \sum_{\alpha=0}^{r} (\mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C_\alpha) \Big) + \sum_{\alpha=0}^{r} (\mathbb{1}_m \otimes \mathbb{1}_n - C_\alpha), \tag{4.63}$$

co pokazuje, że Φ_μ jest rozkładalny. ■

Twierdzenie 4.9. *Niech $n \geq 3m-2$. Wtedy całkowita kododatniość odwzorowania Φ_μ implikuje, że $\mu \geq m$.*

Dowód. Zdefiniujmy wektor $|\xi\rangle = \sum_{k=1}^{m} |e_k\rangle \otimes |f_{2m-k}\rangle$. Wtedy

$$C_\mu^\Gamma |\xi\rangle = \left(\sum_{i,j=1}^{m} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes \left(a\delta_{ij}\mathbb{1}_n - \sum_{\alpha=0}^{r} |f_{j+\alpha}\rangle\langle f_{i+\alpha}| \right) \right) |\xi\rangle \tag{4.64}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |e_i\rangle \otimes \sum_{j=1}^{m} \left(a\delta_{ij} \left| f_{2m-j} \right\rangle - \sum_{\alpha=0}^{n-m} \delta_{i+\alpha,2m-j} \left| f_{j+\alpha} \right\rangle \right) \tag{4.65}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\mu - \#S_i) |e_i\rangle \otimes |f_{2m-i}\rangle\,, \tag{4.66}$$

gdzie

$$S_i = \{(j,\alpha) \colon 1 \leq j \leq m,\ 0 \leq \alpha \leq n-m,\ j+\alpha = 2m-i\}. \tag{4.67}$$

Jeśli założenie, że $n \geq 3m-2$ jest spełnione, to $r = n-m \geq 2m-2$, czyli la każdej pary i,j $(1 \leq i,j \leq m)$ odpowiada dokładnie jedna liczba $\alpha \in \{0,1,\ldots,r\}$ taka, że $j+\alpha = 2m-i$. Ponieważ, $\#S_i = m$ dla każdego $i = 1,2,\ldots,m$, dalej w konsekwencji daje nam $C_\mu^\Gamma |\xi\rangle = (\mu - m) |\xi\rangle$. Ponieważ $\mu - m$ to jedna z wartości własnych operatora C_μ^Γ. Zatem, jeśli Φ_μ jest całkowicie kododatnie, to C_μ^Γ jest dodatnio określonym operatorem w związku z czym $\mu - m$ jest nieujemne. ■

Szczególny przypadek $\mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_{m+1}$

Rozważmy szczególny przypadek odwzorowania postaci (4.30) dla którego wymiary różnią się o 1, czyli $n = m+1$. Wtedy jesteśmy w stanie obliczyć parametr μ z Twierdzenia (4.6) analitycznie.

Zanim jednak zaczniemy, rozważmy specjalny typ macierzy trójdiagonalnej rozważanej w [Los92]. Niech $n, k \in \mathbb{N}$ będą pewnymi liczbami takimi, ze $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, oraz niech $v, a, b, s, t \in \mathbb{C}$. Zdefiniujmy macierz wymiaru $n \times n$ i oznaczmy ją jako $M_{n,k} = M_{n,k}(v, a, b, s, t)$ o postaci

$$M_{n,k}(v,a,b,s,t) = \left[\begin{array}{cccccccc} a+v & & & s & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & a+v & & & \ddots & & \\ \cline{1-3} t & & & v & & & \ddots & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots \\ & & \ddots & & v & & & s \\ \cline{6-8} & & & \ddots & & b+v & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & t & & & b+v \end{array}\right]. \tag{4.68}$$

Oznaczmy jako wyznacznik powyższej macierzy $D_{n,k} = D_{n,k}(v, a, b, s, t) = \det M_{n,k}(v, a, b, s, t)$. Ponieważ interesuje nas specjalny przypadek $k = 1$ to z [Los92, Twierdzenia 2] mamy, że

$$D_{n,1}(v,a,b,s,t) = \sigma^n \left[U_n\left(\frac{v}{2\sigma}\right) + \frac{a+b}{\sigma} U_{n-1}\left(\frac{v}{2\sigma}\right) + \frac{ab}{\sigma^2} U_{n-2}\left(\frac{v}{2\sigma}\right)\right], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.69}$$

gdzie $\sigma = \sqrt{st}$ oraz U_j to wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju zdefiniowane jako

$$U_j(\cos\vartheta) = \frac{\sin(j+1)\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{4.70}$$

Posiadając wszystkie potrzebne nam narzędzia, możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.10. *Niech $\Phi_\mu : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_{m+1}$ będzie postaci* (4.30) *dla $1 \leq k \leq m$. Odwzorowanie Φ_μ jest k-dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mu \geq k + \sum_{j=1}^{k} \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right). \tag{4.71}$$

Dowód. Niech $M = (\sum_{\beta=0}^{1} \overline{\zeta_\beta} V_\beta)(\sum_{\alpha=0}^{1} \zeta_\alpha V_\alpha^\dagger)$ będzie macierzą wymiaru $(m+1) \times (m+1)$ która pojawia się w Twierdzeniu 4.6, gdzie wektor $|\zeta\rangle = (\zeta_0, \zeta_1)^T \in \mathbb{C}^2$ są taki, że $|\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2 = 1$. Okazuje się, że macierz M ma postać trójdiagonalną

$$M = \begin{bmatrix} |\zeta_0|^2 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \zeta_0\overline{\zeta_1} & 1 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 1 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 1 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \zeta_0\overline{\zeta_1} & |\zeta_1|^2 \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

Zauważmy, że $M = M_{m+1,1}(1, -|\zeta_1|^2, -|\zeta_0|^2, z, \overline{z})$, jest macierzą zdefiniowaną dokładnie w (4.68), oraz $z = \overline{\zeta_0}\zeta_1$. Zatem aby zaaplikować Twierdzenie 4.6 musimy obliczyć $\|M\|_{(k)}$. Dla przypadku $z = 0$ macierz M jest projektorem, oraz $\mathrm{Tr}(M) = m$, w związku z czym $\|M\|_{(k)} = k$ dla $k = 1, 2, \ldots, m$. Załóżmy, że $z \neq 0$, wtedy

$$M - \lambda \mathbb{1} = M_{m+1,1}(1-\lambda, -|\zeta_1|^2, -|\zeta_0|^2, z, \overline{z}). \tag{4.73}$$

Aby znaleźć wartości własne macierzy M musimy rozwiązać następujące równanie

$$|z|^n \left(U_{m+1}(x) - \frac{1}{|z|} U_m(x) + U_{m-1}(x) \right) = 0, \tag{4.74}$$

gdzie U_j to wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju ((4.69)), oraz

$$x = \frac{1-\lambda}{2|z|}. \tag{4.75}$$

Wielomiany Czebyszewa spełniają następującą relacje rekurencyjną

$$\begin{aligned} &U_{-1}(x) = 0, \qquad U_0(x) = 1 \\ &U_{m+1}(x) + U_{m-1}(x) = 2xU_m(x), \quad m = 0, 1, \ldots. \end{aligned} \tag{4.76}$$

W związku z czym równanie (4.74) jest równoważne

$$-\lambda |z|^m U_m \left(\frac{1-\lambda}{2|z|} \right) = 0. \tag{4.77}$$

Z równania (4.70) wiemy, że pierwiastki wielomianu U_m muszą być równe $\cos(j\pi/(m+1))$, for $j = 1, 2, \ldots, m$. Zatem, dla ciągu nierosnących niezerowych wartości własnych $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m$ macierzy M jest dany przez

$$\lambda_j = 1 + 2|z| \cos\left(\frac{j\pi}{m+1} \right), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.78}$$

więc,

$$\|M\|_{(k)} = k + 2|z| \sum_{j=1}^{k} \cos\left(\frac{j\pi}{m+1} \right), \quad k = 1, 2 \ldots, m. \tag{4.79}$$

Biorąc pod uwagę, że $\sup\{|\overline{\zeta_0}\zeta_1| : \|\zeta\| = 1\} = \frac{1}{2}$, dostajemy równanie (4.71). ■

Używając Twierdzenia (4.10) możemy analitycznie obliczyć wartości dla których odwzorowanie postaci (4.58) jest k-dodatnie. Wynik tego twierdzenia również można interpretować jako jedną z metod obliczania norm Ky-Fana dla szczególnych macierzy postaci

$$V(\zeta)V(\zeta)^\dagger = \left(\sum_{\alpha=0}^{1} \zeta_\alpha V_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=0}^{1} \zeta_\beta V_\beta\right)^\dagger. \tag{4.80}$$

Jako aplikację powyższych narzędzi,rozważmy odwzorowanie postaci (4.58) dla przypadku $m = 3$ i $n = 4$.

Twierdzenie 4.11. *Jeśli* $\mu \geq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$*, to odwzorowanie* $\Phi_\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^3), \mathcal{B}(\mathbb{C}^4))$ *postaci* (4.58) *jest 2-dodatnie.*

Dowód. Niech $(\zeta_0, \zeta_1)^T \in \mathbb{C}^2$. Wyznaczymy$\|(\sum_{\beta=0}^1 \overline{\zeta_\beta} V_\beta)(\sum_{\alpha=0}^1 \zeta_\alpha V_\alpha^\dagger)\|_{(2)}$ z Twierdzenia 4.6. Wyrażenie pod normą to macierz postaci

$$A = \begin{bmatrix} |\zeta_0|^2 & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 0 & 0 \\ \overline{\zeta_0}\zeta_1 & 0 & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 0 \\ 0 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & 0 & \zeta_0\overline{\zeta_1} \\ 0 & 0 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & |\zeta_1|^2 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_4 + \begin{bmatrix} -|\zeta_1|^2 & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 0 & 0 \\ \overline{\zeta_0}\zeta_1 & 0 & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 0 \\ 0 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & 0 & \zeta_0\overline{\zeta_1} \\ 0 & 0 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & -|\zeta_0|^2 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_4 + M. \tag{4.81}$$

Obliczmy wartości własne $\sigma(A) = 1 + \sigma(M)$ tej macierzy

$$\det \begin{bmatrix} -|\zeta_1|^2 - \lambda & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 0 & 0 \\ \overline{\zeta_0}\zeta_1 & -\lambda & \zeta_0\overline{\zeta_1} & 0 \\ 0 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & -\lambda & \zeta_0\overline{\zeta_1} \\ 0 & 0 & \overline{\zeta_0}\zeta_1 & -|\zeta_0|^2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{4.82}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 2|\zeta_0|^2|\zeta_1|^2 + \lambda(-2|\zeta_0|^4|\zeta_1|^2 - 2|\zeta_0|^2|\zeta_1|^4) \tag{4.83}$$

$$= \lambda(\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda 2|\zeta_0|^2|\zeta_1|^2 - 2|\zeta_0|^2|\zeta_1|^2) \tag{4.84}$$

$$= \lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2|\zeta_0|^2|\zeta_1|^2) = 0. \tag{4.85}$$

Zatem otrzymane wartości własne to $\sigma(A) = \{0, 1 \pm \sqrt{2}|\zeta_0||\zeta_1|, 1\}$. Największymi wartościami własnymi macierzy A są zatem $1 + \sqrt{2}|\zeta_0||\zeta_1|$ oraz 1, więc $\|A\|_{(2)} = 2 + \sqrt{2}|\zeta_0||\zeta_1|$. Wyrażenie to osiąga największą wartość, gdy $|\zeta_0| = |\zeta_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, więc $\sup_\zeta \|A\|_{(2)} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Teza wynika z Twierdzenia 4.11, co kończy dowód. ∎

Z drugiej strony zbadajmy macierz Choi C_ϕ, która jest postaci

$$C_\phi = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
\mu-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\
\cdot & \mu-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
\cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu-1 & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu-1
\end{array}\right]. \tag{4.86}$$

Analizując minory tej macierzy stwierdzamy, że jest ona dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu \geq 3$. Wnioskujemy więc, że jeśli $\mu \in [2+\frac{\sqrt{2}}{2}, 3)$, to ϕ jest 2-dodatnie i nie jest całkowicie dodatnie.

$$T(C_\phi)_{(3)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
\mu-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \mu-1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \mu-1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu-1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \mu-1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu-1
\end{array}\right].$$

Analizując zaznaczony minor stwierdzamy, że powyższa macierz jest dodatnio określona dla $\mu \geq 1{,}8019$, który stanowi wynik numeryczny.

Z drugiej strony na mocy Twierdzenia (4.10) odwzorowanie Φ_μ jest

- dodatnie dla $\mu \geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- 2-dodatnie dla $\mu_2 \geq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- całkowicie dodatnie dla $\mu_3 \geq 3$.

Stwierdzenie 4.12. *Każde odwzorowanie* $\Phi_\mu : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_{m+1}$ *postaci* (4.58) *jeśli jest* 2-*dodatnie to jest rozkładalne.*

Dowód. Załóżmy, że mamy odwzorowanie Φ_a postaci (4.58), z Propozycji 4.8 wiemy, że odwzorowanie to jest 2-dodatnie i rozkładalne jeśli $\mu \geq \mu_2 \geq 2$. Z drugiej strony, z Twierdzenia 4.10 mamy, że $\mu \geq 2 + \sum_{j=1}^{2} \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right)$. Ponieważ $\sum_{j=1}^{2} \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right) \geq 0$ dostajemy, że odwzorowanie Φ_μ jeśli jest 2-dodatnie to jest również rozkładalne. ■

W pracy [CK09] jest klasyfikacja dodatniości odwzorowań liniowych na algebrach macierzowych która opiera się na rodzinie pewnych warunków spektralnych. Główną aplikacją tych wyników jest określenie warunków koniecznych dla odwzorowań typu (4.30). Jednak w przypadku gdy mamy konkretnie zadane odwzorowanie (4.58) dla przypadku $m = n = 3$ to warunki z pracy [CK09] nie dają możliwości na zbudowanie odwzorowania 2-dodatniego które nie byłoby całkowicie dodatnie. Widzimy zatem, że Twierdzenie (4.6) pozwala nam na konstrukcje takich odwzorowań co stanowi pewien krok w lepszym zrozumieniu struktury odwzorowań k-dodatnich.

Przykład 4.13. Rozważmy odwzorowanie Choi [Cho75b] ϕ które wiemy, że jest nierozkładalne oraz jest ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich. Z przykładu 4.3 wiemy, że odpowiada to parametrom $A = (2, 0, 1)$ [CKL92] z uogólnionego odwzorowani Choi które dla tych parametrów ma postać

$$\psi_\lambda(X) = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{33} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & x_{11} + x_{22} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & x_{22} + x_{33} \end{bmatrix} + \rho \operatorname{Tr}\{X\}. \tag{4.87}$$

Odwzorowanie to otrzymaliśmy przez przypisanie $\phi \mapsto \psi_\lambda = \lambda \operatorname{Tr} - \psi_{CP}$ gdzie można je dalej przepisać jako $\psi_\lambda = \phi + (\lambda - \lambda_0)\operatorname{Tr} = \phi + \rho \operatorname{Tr}$. Zauważmy, że dla $\lambda = \lambda_0$ odzyskujemy oryginalne odwzorowanie Choia, które jest dodatnie, dalej stosując Twierdzenie 4.6 jesteśmy w stanie znaleźć parametr λ taki, że odwzorowanie będzie 2-dodatnie oraz całkowicie dodatnie.

Dobierając parametr $\lambda_0 = 2$, odwzorowanie (4.87) jesteśmy w stanie przedstawić przy pomocy siedmiu operatorów Krausa

$$K_0 = \mathbb{1}_3, \quad K_1 = \sqrt{2}e_{12}, \quad L_1 = e_{13}, \tag{4.88}$$

$$K_2 = \sqrt{2}e_{23}, \quad L_2 = e_{21}, \tag{4.89}$$

$$K_3 = \sqrt{2}e_{31}, \quad L_3 = e_{32}, \tag{4.90}$$

wtedy odwzorowanie możemy zapisać jako

$$\psi_\lambda(X) = \lambda \operatorname{Tr}(X) - K_0 X K_0^\dagger - \sum_{i=1}^{3} (K_i X K_i^\dagger + L_i X L_i^\dagger). \tag{4.91}$$

Korzystając z Twierdzenia 4.6, macierz z jakiej liczymy supremum to $K(\xi)K(\xi)^\dagger$, gdzie

$$K(\xi) = \alpha \mathbb{1} + \begin{bmatrix} \cdot & \gamma_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \beta_1 \\ \beta_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta_3 & \cdot \end{bmatrix}. \tag{4.92}$$

Wymnażając $K(\xi)K(\xi)^\dagger$ oraz dla uproszczenia przyjmując, że $\beta = \beta_i$ oraz $\gamma = \gamma_i$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz podstawiając

$$x = |\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + |\gamma|^2 \tag{4.93}$$

$$y = \sqrt{2}\alpha\overline{\beta} - \sqrt{2}\beta\overline{\gamma} + \gamma\overline{\alpha}, \tag{4.94}$$

otrzymujemy, że

$$K(\xi)K(\xi)^{\dagger} = \begin{bmatrix} x & y & -\overline{y} \\ -\overline{y} & x & y \\ y & -\overline{y} & x \end{bmatrix}. \tag{4.95}$$

Wartości własne takiej macierzy to $\lambda_{1,2} = x + y$ oraz $\lambda_3 = x - 2y$. Aby policzyć 2-dodatniość musimy wziąć dwie największe wartości własne, w naszym wypadku to $\lambda_{1,2}$ i policzyć supremum, czyli wracając do wyjściowych zmiennych otrzymujemy

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha^2 + \sqrt{2}\alpha\beta + 2\beta^2 + \alpha\gamma - \sqrt{2}\beta\gamma + \gamma^2 \tag{4.96}$$

przy warunku, że $\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2 = 1$. Korzystając z metody mnożników Lagrangea znajdujemy maksimum w punktach $x = -\sqrt{2}/2, y = 1/3$ oraz $z = 2^{-\frac{1}{2}}/3$ które wynosi dokładnie $\lambda_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tak samo całkowita dodatniość jest dla $\lambda_0 + 1$. Aby potwierdzić otrzymane wyniki, zwróćmy uwagę na odwzorowanie (4.87) jako uogólniony Choi z przykładu 4.3, dobierając parametry $A = (2 + \lambda, \lambda, 1 + \lambda)$, to z [CKL92, Twierdzenie 4.2] otrzymujemy,

$$\lambda(1 + \lambda) = (1 - \lambda)(1 + 2\lambda) > 0, \tag{4.97}$$

którego rozwiązaniem jest $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, czyli otrzymujemy, że $\psi_{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ jest 2-dodatnie oraz całkowicie dodatnie dla $\lambda \geq 1$.

4.4 Dodatkowe numeryczne metody badania odwzorowań

W tej części pracy przyjrzymy się pewnym modyfikacjom i uogólnieniom jakie można przypisać do odwzorowania postaci (4.58). Ze względu na trudność w obliczaniu Twierdzenia 4.6 posługiwać się będziemy głównie wynikami numerycznymi uzyskanymi z programu *Wolfram Mathematica* oraz *Matlab*. Przypomnijmy, że [Stø10] pokazał, że każde odwzorowanie dodatnie można przedstawić w postaci $\mu \operatorname{Tr} - \psi_{CP}$, Twierdzenie (4.6) pozwala nam na charakteryzację k-dodatniości względem parametru μ tego typu odwzorowań ze względu na reprezentacje opartą o operatory Krausa odwzorowania ψ_{CP}.

Bardzo ważną własnością odwzorowań jest również ich nierozkładalność jak widzieliśmy w poprzednim dziale, ponieważ to odwzorowania nierozkładalne pozwalają nam konstruować świadków splątania którzy są w stanie wykrywać stany PPT splątane oraz NPT. Istnienie takich odwzorowań nierozkładalnych przenosi się na opis stanów splątanych, tak jak, określenie maksymalnej liczby Schmidta jaki stan może mieć. W pracy [HLLMH18] skonstruowano rodzinę stanów PPT w $\mathbb{M}_m \otimes \mathbb{M}_m$ dla których zakres liczby Schmidta jest między 1 a $\left\lceil \frac{m-1}{4} \right\rceil$. Wynik ten został poprawiony [Car20, PM07], gdzie stany PPT posiadają zakres liczby Schmidta między 1 a $\left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil$. Widzimy zatem jak ważne jest posiadanie przez odwzorowanie własności nierozkładalności. W ogólności badanie rozkładalności jest bardzo ciężkie ponieważ nie ma wiele narzędzi pozwalających określanie czy dane odwzorowanie jest rozkładalne czy też nie.

Jedną z metod do weryfikacji czy odwzorowanie jest rozkładalne czy nie jest konstrukcja algorytmu przy pomocy programowania półokreślonego (SDP) [Ste04]. Idea programowania półokreślonego jest szczególnym przypadkiem optymalizacji wypukłej która odpowiada optymalizacji funkcji liniowych pod warunkiem liniowych nierówności macierzowych (LMI). Typowe zagadnienie pierwotne ma postać

$$\begin{aligned} &\min \quad c^T \mathbf{x}, \\ &\text{pod warunkiem} \quad F(\mathbf{x}) \geq 0, \end{aligned} \tag{4.98}$$

gdzie c jest znanym wektorem, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $F(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_i x_i F_i$ dla pewnych macierzy F_i. Funkcję $c^T \mathbf{x}$ po której minimalizujemy nazywamy funkcją celu, gdzie minimalizacja jest po wektorze $\mathbf{x}$, którego współrzędne są zmiennymi w rozważanym problemie. Zbiór dopuszczalnych rozwiązań, czyli zbiór wektorów $\mathbf{x}$ takich, że spełnione są liniowe nierówności macierzowe jest zbiorem wypukłym. W szczególności gdy $c = 0$ widać, że (4.98) redukuje się i nie mamy funkcji po której byśmy mieli minimalizować w związku z czym problem redukuje się do sprawdzenia czy wektor $\mathbf{x}$ spełnia LMI. Ważną własnością SDP jest istnienie problemu dualnego dla problemu pierwotnego która pozawala nam ograniczać zbiór rozwiązań z góry gdzie problem pierwotny daje nam ograniczenie z dołu. Dla każdego SDP postaci (4.98) istnieje inny stowarzyszony problem nazywany problemem dualnym który zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} &\max \quad -\operatorname{Tr}(F_0 z), \\ &\text{pod warunkiem} \quad Z \geq 0, \\ &\operatorname{Tr}(F_i Z) = c_i, \end{aligned} \tag{4.99}$$

gdzie Z jest macierzą hermitowską po której maksymalizacja jest wykonywana. Odpowiada to maksymalizacji liniowego funkcjonału, wraz z LMI i liniowymi warunkami. Niech wektor $\mathbf{x}$ oraz macierz Z będą dopuszczalnymi rozwiązaniami problemu pierwotnego i dualnego, wtedy

$$c^T \mathbf{x} + \operatorname{Tr}(F_0 Z) = \operatorname{Tr}(F(\mathbf{x}) Z) \geq 0. \tag{4.100}$$

Nierówność (4.100) mówi nam, że wartość funkcji celu dla problemu pierwotnego obliczona na wektorze $\mathbf{x}$, jest zawsze większa lub równa wartości funkcji celu dla problemu dualnego obliczonej na macierzy Z. Własność ta nazywana jest słabą dualnością, można to interpretować w ten sposób, że nie otrzymaliśmy konkretnego wyniku a pewien przedział możliwych wyników. Szczególnym przypadkiem dla równania (4.100) jest przypadek gdy dobierzemy $c = 0$, gdyż otrzymamy wtedy

$$\operatorname{Tr}(F_0 Z) \geq 0, \tag{4.101}$$

gdzie można to interpretować jako pewne kryterium które musi zachodzić dla dowolnego dopuszczalnego rozwiązania problemu dualnego. Własność tą można użyć do pokazania nierozwiązywalności problemu pierwotnego, czyli problem nazywamy nierozwiązywalnym, jeśli nie istnieje takie rozwiązanie dla którego spełnione są ograniczenia takie, że jeśli istnieje $Z \geq 0$ i $\operatorname{Tr}(F_i Z) = 0$, oraz $\operatorname{Tr}(F_0 Z) < 0$ to wtedy problem pierwotny nie ma rozwiązań. Metoda programowania półokreślonego jest bardzo szeroko stosowana w problemach teorii informacji kwantowej tak jak algorytmy pozwalające budowę stanów splątanych [Enr18], określanie wierności dla transformacji operacji unitarnych [EHM+23] czy kryterium badające separowalność stanów oparte o symetryczne rozszerzanie [DPS02]. Do naszych celów wykorzystamy algorytm do optymalizacji po stanach PPT ρ tak, żeby macierz Choi C_Φ pewnego k-dodatniego odwzorowania tak aby

$$\begin{aligned} &\min \quad \mathrm{Tr}(C_\Phi \rho), \\ &\text{pod warunkiem} \quad \rho \geq 0, \\ &\mathrm{Tr}\,\rho = 1, \\ &\rho^\Gamma \geq 0. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Czyli jeśli, C_Φ było by świadkiem splątania dla stanu ρ PPT to odwzorowanie Φ jest nierozkładalne dla $\mathrm{Tr}(C_\Phi \rho) < 0$. Jeśli otrzymane dopuszczalne rozwiązanie będzie większe od zera to od razu widzimy, że odwzorowanie Φ musi być rozkładalne ponieważ jak już wiemy, problem pierwotny daje nam ograniczenie z dołu w związku z czym dla $\mathrm{Tr}(C_\Phi \rho) \geq 0$ nie istnieje stan PPT dla którego C_Φ mogło by być świadkiem splątania. Drugim algorytmem jakim będziemy się również posługiwali aby mieć pewność czy dane odwzorowanie jest rozkładalne bądź też nie, opiera się na zagadnieniu

$$\begin{aligned} &\min \quad \mathrm{Tr}(P_1 + Q_1), \\ &\text{pod warunkiem} \quad C_\Phi - P - Q^\Gamma = P_1 - Q_1, \\ &P, P_1, Q, Q_1 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Powyższy algorytm pozwala sprawdzić, czy macierz Choi odwzorowania Φ posiada rozkład na macierze $C_\Phi = P_1 + Q_1$.

W tej pracy wykorzystamy metodę programowania półokreślonego do badania nierozkładalności lub rozkładalności odwzorowań k-dodatnich. W dalszej części tej pracy, jeżeli będziemy stawiać hipotezy odnośnie własności czy dane odwzorowanie jest rozkładalne czy też nie, opierać się będziemy głównie o algorytm (4.102), zaimplementowany do oprogramowania *Matlab* używając w tym celu pakietu do optymalizacji wypukłej SEDUMI [Stu99].

Stwierdzenie 4.14. *Rozważmy odwzorowanie Φ_μ postaci* (4.58)*, dla $m \geq 3$ oraz dostatecznie dużego n, odwzorowanie Φ_μ jest $(m-1)$-dodatnie i nie jest całkowicie dodatnie jak i całkowicie kododatnie dla $\mu \in [\mu_{n-1}, m)$.*

Posługując się wynikami numerycznymi, najniższy wymiar który spełnia Propozycję (4.14) dla odwzorowania postaci (4.58) są to wymiary $m = 3$ i $n = 7$. Macierz po której musimy policzyć supremum z Twierdzenia (4.6) prezentuje się następująco

$$V(\xi)V(\xi)^\dagger =$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 & \xi_1\xi_4 & \xi_1\xi_5 & 0 & 0 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_1^2+\xi_2^2 & \xi_1\xi_2+\xi_3\xi_2 & \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4 & \xi_1\xi_4+\xi_2\xi_5 & \xi_1\xi_5 & 0 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_1\xi_2+\xi_3\xi_2 & \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 & \xi_1\xi_2+\xi_3\xi_2+\xi_3\xi_4 & \xi_1\xi_3+\xi_5\xi_3+\xi_2\xi_4 & \xi_1\xi_4+\xi_2\xi_5 & \xi_1\xi_5 \\ \xi_1\xi_4 & \xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4 & \xi_1\xi_2+\xi_3\xi_2+\xi_3\xi_4 & \xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2 & \xi_2\xi_3+\xi_4\xi_3+\xi_4\xi_5 & \xi_2\xi_4+\xi_3\xi_5 & \xi_2\xi_5 \\ \xi_1\xi_5 & \xi_1\xi_4+\xi_2\xi_5 & \xi_1\xi_3+\xi_5\xi_3+\xi_2\xi_4 & \xi_2\xi_3+\xi_4\xi_3+\xi_4\xi_5 & \xi_3^2+\xi_4^2+\xi_5^2 & \xi_3\xi_4+\xi_5\xi_4 & \xi_3\xi_5 \\ 0 & \xi_1\xi_5 & \xi_1\xi_4+\xi_2\xi_5 & \xi_2\xi_4+\xi_3\xi_5 & \xi_3\xi_4+\xi_5\xi_4 & \xi_4^2+\xi_5^2 & \xi_4\xi_5 \\ 0 & 0 & \xi_1\xi_5 & \xi_2\xi_5 & \xi_3\xi_5 & \xi_4\xi_5 & \xi_5^2 \end{bmatrix},$$

dla warunku $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 = 1$. Wykonując obliczenia numeryczne możemy stwierdzić, że odwzorowanie Φ_μ jest dodatnie dla $\mu_1 \geq 2.56$, 2-dodatnie dla $\mu_2 \geq 2.97$ oraz jest całkowicie dodatnie i całkowicie kododatnie dla $\mu_3 \geq 3$. Widać stąd, że istnieje pewien przedział parametru μ dla którego Φ_μ jest 2-dodatnie i nie jest całkowicie dodatnie i całkowicie kododatnie lecz test na rozkładalność przy pomocy stanu PPT pokazuje, że odwzorowanie Φ_{μ_2} jest rozkładalne.

Powyższa metoda daje nadzieje na konstrukcję odwzorowań k-dodatnich które można charakteryzować parametrem μ które nie będą całkowicie dodatnie i całkowicie kododatnie. Konstrukcja takich odwzorowań pomogłaby nam lepiej zrozumieć wciąż mało poznaną strukturę odwzorowań k-dodatnich a w konsekwencji lepiej zrozumieć fenomen jakim jest splątanie.

4.4.1 Modyfikacje rodziny odwzorowań Φ_μ

Przyjrzymy się pewnej prostej modyfikacji macierzy Choi odwzorowania Φ_μ zdefiniowanej w (4.58) która zmienia zachowanie odwzorowania. Pokażemy, że można w ten sposób uzyskać odwzorowania 2-dodatnie które nie są całkowicie dodatnie i całkowicie kododatnie dla większego zakresu parametru μ charakteryzującego Φ_μ.

Przypomnijmy, że macierz Choi odwzorowania $\Phi_\mu : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ postaci (4.58) jest zadane przez

$$C_{\Phi_\mu} = \sum_{i,j=1}^{m} e_{ij} \otimes C_{ij}, \tag{4.104}$$

dla macierzy $C_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{r} V_\alpha e_{ij} V_\alpha^\dagger \in \mathbb{M}_n$. Nasza modyfikacja będzie polegała na wprowadzeniu pewnego parametru $b \in \mathbb{R}$ oraz zdefiniowaniu nowego odwzorowania $\Psi_{a,b}$ takiego, którego macierz Choi jest postaci

$$C_{\Psi_{\mu,b}} = \begin{cases} bC_{ij}^T & \text{gdy } i = m,\ 2 \leq j \leq m-1 \text{ lub } 2 \leq i \leq m-1,\ j = m, \\ C_{ij} & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{4.105}$$

W Tabeli 4.1 zebraliśmy numeryczne wyniki pozwalające scharakteryzować odwzorowanie $\Psi_{\mu,b}$ dla parametru $b = 2$. Można wyczytać dla jakich parametrów μ odwzorowanie $\Psi_{\mu,2}$ jest dodatnie, 2 dodatnie, całkowicie dodatnie oraz całkowicie kododatnie oraz wykorzystując parametry μ_k dla których odwzorowanie jest k-dodatnie zweryfikować numerycznie, czy jest ono rozkładalne czy nie rozkładalne. Wartość zero w tabeli należy rozumieć jako nierozstrzygający, ponieważ w (4.102) liczymy minimum po śladzie z iloczynu operatorów to wartości jakie otrzymuje komputer mogą być na granicy błędu numerycznego. Zaobserwować natomiast możemy, że wprowadzona modyfikacja pozwala nam konstruować odwzorowania 2-dodatnie które nie są całkowicie dodatnie i całkowicie kododatnie nawet dla wymiarów $m = 3, n = 4$. Otrzymane w ten sposób odwzorowania 2-dodatnie nadal są rozkładalne lecz widzimy również, że można w ten sposób otrzymać odwzorowania dodatnie nierozkładalne ponieważ istnieją stany PPT splątane które są wykrywane przez $C_{\Psi_{\mu_1,2}}$

m	n	μ_1	μ_2	$co\mathcal{CP}$	$\mathcal{CP}$	DEC_{μ_1}	DEC_{μ_2}
3	4	2.29	2.97	3.19	3.00	0.00	0.68
3	5	2.77	3.31	3.39	3.49	0.00	0.54
3	6	3.06	3.47	3.46	3.52	0.01	0.42
3	7	3.24	3.56	3.59	3.62	0.01	0.33
3	8	3.35	3.61	3.60	3.63	0.00	0.26
3	9	3.44	3.64	3.65	3.67	0.01	0.21
3	10	3.50	3.67	3.66	3.67	0.01	0.18
3	11	3.54	3.68	3.68	3.69	0.01	0.15
4	5	2.44	3.29	3.97	3.76	-0.02	0.83
4	6	3.11	3.90	4.24	4.29	-0.04	0.75
4	7	3.61	4.26	4.44	4.47	-0.03	0.62
4	8	3.94	4.50	4.59	4.71	-0.03	0.53
4	9	4.16	4.66	4.71	4.77	-0.05	0.45
4	10	4.34	4.76	4.80	4.87	-0.05	0.37
4	11	4.48	4.83	4.86	4.89	-0.03	0.32
5	6	2.37	3.41	4.58	4.42	-0.13	0.91
5	7	3.18	4.20	4.95	4.82	-0.12	0.90
5	8	3.77	4.70	5.13	5.12	-0.16	0.77
5	9	4.26	5.06	5.41	5.46	-0.16	0.64
5	10	4.59	5.30	5.56	5.61	-0.19	0.52
5	11	4.87	5.50	5.73	5.81	-0.18	0.45
6	7	2.32	3.41	5.11	5.26	-0.20	0.89
6	8	3.04	4.37	5.52	5.54	-0.33	1.00
6	9	3.73	4.94	5.70	5.83	-0.36	0.85
6	10	4.32	5.43	6.06	6.17	-0.36	0.75
6	11	4.75	5.76	6.25	6.37	-0.41	0.60

Tabela 4.1: Najmniejsze parametry μ dla których odwzorowanie $\Psi_{\mu_i,2} : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ jest dodatnie, 2-dodatnie, całkowicie dodatnie i całkowicie kododatnie. Dodatkowo DEC_{μ_1} oraz DEC_{μ_2} reprezentują wartości $\min_\rho \mathrm{Tr}\left(C_{\Psi_{\mu_i,2}}\rho\right)$ dla ρ będącego stanem PPT.

4.4.2 Uogólnienie rodziny odwzorowań Φ_λ

W tym rozdziale przedstawimy pewną generalizację rodziny jednoparametrowych odwzorowań Φ_λ postaci (4.58). Rozważmy nowe odwzorowanie $\phi_\lambda : \mathbb{M}_m \to \mathbb{M}_n$ o postaci

$$\phi_\lambda(X) = \lambda \operatorname{Tr}(X)\mathbb{1}_n - \psi_{CP}, \tag{4.106}$$

dla $X = (x_{ij}) \in \mathbb{M}_m$, gdzie

$$\psi_{CP} = \left(\sum_{\alpha=0}^{r} \sum_{i=1}^{m} V_\alpha \Big((\lambda_0 - a_i) x_{i,i+j} \Big) V_\alpha^\dagger \right)_{j=0,1,\dots m-1}, \tag{4.107}$$

gdzie $V_\alpha : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ to wcześniej już zdefiniowana izometria $V_\alpha(e_i) = f_{i+\alpha}, a_1, \dots a_m$ to rzeczywiste parametry oraz λ_0 to liczba dobierana tak, że dla wszystkich $i = 1, \dots, m$ zachodzi $\lambda_0 - a_i \geq 0$, dodatkowo zakładamy, że dla $j = 0$ zachodzi $(\lambda_0 - a_i) = 1$.

Odwzorowanie ϕ_λ postaci (4.106) stanowi pewną rodzinę odwzorowań definiowanych przez parametry $a_1, \dots, a_m$ dla których k-dodatniość określa parametr $\lambda \geq 0$. Zauważmy, że w szczególnym przypadku dla $j = 0$, $\lambda_0 - a_i = 0$ dla $i = 2, \dots, m$ oraz $\lambda_0 - a_1 = 1$ to odwzorowanie redukuje się do postaci

$$\psi_\lambda(X) = \lambda \operatorname{Tr}(X)\mathbb{1}_n - \sum_{\alpha=0}^{r} V_\alpha X V_\alpha^\dagger, \tag{4.108}$$

czyli odzyskujemy odwzorowanie (4.58). Zatem rodzina odwzorowań postaci (4.106) stanowi uogólnienie dla rodziny odwzorowań jednoparametrowej (4.58).

Poniżej przedstawiamy charakteryzację odwzorowania (4.108) dla $\psi_\lambda : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{M}_4$ ze względu na dodatniość, 2-dodatniość oraz całkowitą dodatniość jak i całkowitą kododatniość obliczoną numerycznie, ze względu na różnie dobrane parametry $A = (a_1, a_2, a_3)$ oraz parametr λ_0.

- $A = (2, 1, 1), \quad \lambda_0 = 2$

$$\mu_1 = 2.91(DEC), \quad \mu_2 = 3.55(coCP), \quad \mu_3 = 3.73(CP). \tag{4.109}$$

- $A = (1, 1, 1), \quad \lambda_0 = 2$

$$\mu_1 = 3.5(DEC), \quad \mu_2 = 3.62, \quad \mu_{coCP} = 3,74, \quad \mu_3 = 4.74(CP). \tag{4.110}$$

- $A = (2, 2, 2), \quad \lambda_0 = 2$

$$\mu_1 = 1.71(DEC), \quad \mu_{coCP} = 1.81, \quad \mu_2 = 2.71, \quad \mu_3 = 3(CP). \tag{4.111}$$

- $A = (2, 0, 1), \quad \lambda_0 = 2$

$$\mu_1 = 3.56(DEC), \quad \mu_2 = 4.12, \quad \mu_{coCP} = 4.18, \quad \mu_3 = 4.56(CP). \tag{4.112}$$

- $A = (2, 2, 1), \quad \lambda_0 = 2$

$$\mu_1 = 2.32(DEC), \quad \mu_{coCP} = 2.74, \quad \mu_2 = 3.2, \quad \mu_3 = 3.7(CP). \tag{4.113}$$

- $A = (1, 2, 1), \quad \lambda_0 = 2$

$$\mu_1 = 3.1(DEC), \quad \mu_{coCP} = 3.47, \quad \mu_2 = 4.15, \quad \mu_3 = 4.73(CP). \tag{4.114}$$

Analizując powyższe wyniki można zauważyć, że w szczególnym przypadku 4.4.2 gdy $A = (2, 2, 2)$ oraz $\lambda_0 = 2$ odzyskujemy wyniki dla (4.58) obliczone w poprzednim dziale analitycznie. Dodatkowo warto zauważyć, że odwzorowania otrzymane w ten sposób są rozkładalne. Wynikać to może z faktu, że odwzorowanie Tr jest w pewnym sensie w centrum stożka całkowicie odwzorowań dodatnich i operacja obkładania izometriami V_α które odejmujemy od odwzorowania ślad ma mały efekt aby przesunąć odwzorowanie tak aby było w stożku odwzorowań 2-dodatnich nierozkładalnych. Ponieważ każde odwzorowanie da się przedstawić w postaci $\mathrm{Tr} - \psi_{CP}$ oraz wszystkie rozważane w tej pracy odwzorowania działające w $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^3), \mathcal{B}(\mathbb{C}^4))$ w przypadku gdy są 2-dodatnie są rozkładalne. Nie wyklucza to jednak możliwości istnienia odwzorowań 2-dodatnich nierozkładalnych.

Rozdział 5

Analiza ścian w stożkach $\mathcal{P}_k$

Ponieważ nasza wiedza dotycząca struktury odwzorowań dodatnich jest uboga, nawet na niskowymiarowych algebrach macierzowych, wydaje się oczywiste, żeby badać odwzorowania dodatnie które są ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich. Wiadomo, że dla ogólnego odwzorowania $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ postaci

$$X \mapsto AXA^\dagger, \qquad X \mapsto AX^T X^\dagger, \tag{5.1}$$

dla $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ są one ekstremalne w stożku odwzorowań całkowicie dodatnich między $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ [YH05]. Choi podał pierwszy przykład odwzorowania dodatniego które było też ekstremalne które nie jest postaci (5.1) czyli było nierozkładalne [Cho75b]. W literaturze są przykłady odwzorowań ekstremalnych [Ha03, Wor76a, Rob85b, Cho75b, MO14] które są nierozkładalne. Załóżmy, że mamy dwie skończeniewymiarowe przestrzenie Hilberta $\mathcal{H}, \mathcal{K}$, niech $\mathcal{K} \ni \xi \mapsto \overline{\xi} \in \mathcal{K}$ oraz $\mathcal{H} \ni x \mapsto \overline{x} \in \mathcal{H}$ będzie antyliniową inwolucją na tych przestrzeniach. Dla operatora $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zdefiniujmy transpozycję $Y^T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jako $Y^T x = \overline{Y^\dagger \overline{x}} \in \mathcal{H}$. Korzystając z wyników prac [EK00, Stø20] możemy rozważyć biliniową parę $\langle \cdot | \cdot \rangle_d$ pomiędzy $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ oraz $\mathcal{B}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zdefiniowaną jako

$$\langle \phi | X \otimes Y \rangle_d = \mathrm{Tr}\Big(\phi(X) Y^T\Big), \tag{5.2}$$

gdzie $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ oraz $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dla stożka $\mathcal{P}$ możemy zdefiniować jego stożek dualny $\mathcal{P}' \subset \mathcal{B}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ jako

$$\mathcal{P}' = \{Z \in \mathcal{B}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \langle \phi | Z \rangle_d \geq 0 \text{ dla wszystkich } \phi \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \mathcal{B}(\mathcal{H}))\}. \tag{5.3}$$

Wiadomo, że $\mathcal{P}' = \mathcal{S}$ [HHH96, MM01, Per96].

Przypomnijmy, że odwzorowanie ϕ nazywamy ekstremalne jeśli ϕ generuje promień ekstremalny w stożku odwzorowań dodatnich $\mathcal{P}$, czyli $\psi \leq \phi$ implikuje $\psi = \lambda\phi$ dla pewnej $\lambda \in [0, 1]$ oraz $\psi \in \mathcal{P}$, gdzie przez $\psi \leq \phi$ mamy na myśli, ze $\phi - \psi \in \mathcal{P}$, gdzie

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \otimes Y_i : n \in \mathbb{N}, X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{K})_+, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+, i = 1, \ldots, n \right\}, \tag{5.4}$$

to stożek nieunormowanych stanów separowalnych lub stożek operatorów separowalnych.

Przykład 5.1. Odwzorowanie identycznościowe $\mathrm{id}_n = \mathrm{Ad}_{\mathbb{1}_n}$ jest ekstremalne w $\mathcal{P}$ Aby to zobaczyć załóżmy, że ϕ i $\mathrm{id}_n - \phi$ są dodatnie. Wtedy dla każdego wektora jednostkowego $|\xi\rangle \in \mathbb{C}^n$, mamy $0 \leq \phi(|\xi\rangle\langle\xi|) \leq |\xi\rangle\langle\xi|$, więc istnieje liczba λ_ξ taka, że $0 \leq \lambda_\xi \leq 1$ taka, że

$$\phi(|\xi\rangle\langle\xi|) = \lambda_\xi \, |\xi\rangle\langle\xi| \,, \tag{5.5}$$

ponieważ, $|\xi\rangle\langle\xi|$ generuje promień ekstremalny promień w stożku wypukłym M_n^+. Pokażemy, że $\lambda_\xi = \lambda_\eta$ dla dowolnych wektorów jednostkowych $|\xi\rangle$ i $|\eta\rangle$. Zauważmy, że $\phi(p) \leq p$ dla każdego projektora w M_n^+, który implikuje $(\mathbb{1}_n - p)\phi(p) = 0$. Zamieńmy p na $\mathbb{1}_n - p$ aby dostać $p\phi(\mathbb{1}_n - p) = 0$. Stąd mamy

$$0 = (\mathbb{1}_n - p)\phi(p) - p\phi(\mathbb{1}_n - p) = \phi(p) - p\phi(\mathbb{1}_n). \tag{5.6}$$

Weźmy odwzorowanie sprzężone

$$0 = (\phi(p) - p\phi(\mathbb{1}_n))^\dagger = \phi(p) - \phi(\mathbb{1}_n)p, \tag{5.7}$$

wnioskujemy, że $\phi(\mathbb{1}_n)$ komutuje z każdym projektorem. Ponieważ każdą macierz można przedstawić jako kombinację liniową projektorów, to zauważmy, że $\phi(\mathbb{1}_n) = \lambda\mathbb{1}_n$. Wybierając bazę ortonormalną $\{|\xi_i\rangle\}$, mamy

$$\sum_i \lambda_{\xi_i} |\xi_i\rangle\langle\xi_i| = \sum_i \phi(|\xi_i\rangle\langle\xi_i|) = \phi(\mathbb{1}_n) = \lambda\mathbb{1}_n = \sum_i \lambda \, |\xi_i\rangle\langle\xi_i| \,. \tag{5.8}$$

Dostawiając $|\xi_i\rangle$ do prawej części powyższego ciągu równości dostajemy, że $\lambda_{\xi_i} = \lambda$, w związku z czym możemy podsumować, że $\phi = \lambda \cdot \mathbb{1}_n$. Pokazuje to, że odwzorowanie identycznościowe $\mathbb{1}_n$ tworzy promień ekstremalny w $\mathcal{P}$.

Odwzorowanie $\phi \in \mathcal{P}$ nazywamy dodatnim eksponowanym jeśli istnieje $Z_0 \in \mathcal{S}$ takie, że

$$\mathbb{R}_+\phi = \{\psi \in \mathcal{P} : \langle\psi|Z_0\rangle_d = 0\}. \tag{5.9}$$

Dla podzbioru $F \subset \mathcal{P}$ (równoważnie $G \subset \mathcal{S}$) zdefiniujmy $F' = \mathcal{S}$ (odpowiednio $G' \subset \mathcal{P}$) jako

$$F' = \{Z \in \mathcal{S} : \langle\phi|Z\rangle_d = 0 \quad \forall\phi \in F\} \quad G' = \{\phi \in \mathcal{P} : \langle\phi|Z\rangle_d = 0 \quad \forall Z \in G\}. \tag{5.10}$$

Mówimy, że F' jest domkniętą ścianą stożka $\mathcal{S}$ oraz G' jest domkniętą ścianą stożka $\mathcal{P}$. Można pokazać [EK00], że $\phi \in \mathcal{P}$ jest punktem eksponowanym w stożku odwzorowań dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\phi\}'' = \mathbb{R}_+\phi$. Zauważmy, że elementy ekstremalne w stożku $\mathcal{S}$ są postaci $\eta\eta^\dagger \otimes yy^\dagger$, gdzie $\eta \in \mathcal{K}$ oraz $x \in \mathcal{H}$. W związku z czym punkty eksponowane w stożku odwzorowań dodatnich można scharakteryzować [Mar11] w następujący sposób: ϕ jest eksponowany wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall\psi \in \mathcal{P} : \left(\forall(\eta, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{H} : \left\langle y \middle| \phi(\eta\eta^\dagger)y \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle y \middle| \psi(\eta\eta^\dagger)y \right\rangle = 0\right) \Rightarrow \psi \in \mathbb{R}_+\phi. \tag{5.11}$$

Przypomnijmy, że twierdzenie Straszewicza [Str35, Roc70] mówi, że zbiór dla stożka odwzorowań dodatnich $\mathcal{P}$, zbiór $Exp(\mathcal{P})$ jest gęsty w $Ext(\mathcal{P})$, czyli do pełnej charakteryzacji zbioru odwzorowań dodatnich wystarczy opisać zbiór punktów eksponowanych zbioru $\mathcal{P}$. Oryginalne odwzorowanie Choia nie jest eksponowane, lecz pewnego jego generalizacje [CKL92] okazuje się, że są eksponowane [HK12]. W literaturze są znane przykłady odwzorowań eksponowanych [HK11, HK14, CS12, DS12, Wor76b, MO14]. Interpretacja geometryczna punktów eksponowanych została przedstawiona w pracy [Mar10].

Dodatkowo przedstawiamy algorytm badania geometrycznych własności odwzorowań dodatnich które są ekstremalne w stożkach odwzorowań $\mathcal{P}$. Wiemy, że każde odwzorowanie ekstremalne tworzy promień ekstremalny w stożku odwzorowań dodatnich. Jeśli założymy, że środkiem takiego stożka jest odwzorowanie Tr to możemy rozważać rzut odwzorowania Tr na dobrane odwzorowanie ekstremalne w sensie Hilberta-Schmidta. Aby móc porównywać tak różne odwzorowania należy wprowadzić pewną normalizację, tak aby $\|C_\psi\|_{HS} = 1$, dla pewnego odwzorowania ψ którego macierz Choi jest C_ψ. Wprowadźmy w tym miejscu notację taką, że $|C_\psi\rangle \in \mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n)$, wtedy rzut ψ na Tr możemy zapisać jako

$$\langle C_{\mathrm{Tr}} | C_\psi \rangle_{HS} = \mathrm{Tr}\left(C_{\mathrm{Tr}}^\dagger C_\psi \right). \tag{5.12}$$

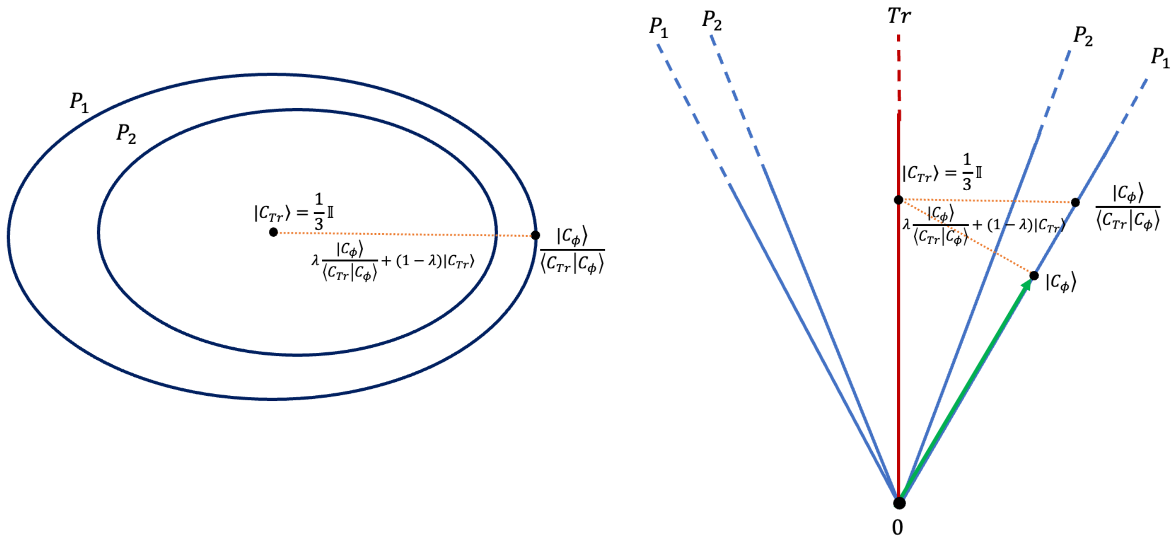
Mając rzut odwzorowania Tr na odwzorowanie ekstremalne ψ, możemy zdefiniować nowe odwzorowanie $|C_{\phi_\lambda}\rangle := |C_{\mathrm{Tr}}\rangle + \lambda(|C_\psi\rangle - |C_{\mathrm{Tr}}\rangle)$. Odwzorowanie to jest scharakteryzowane przez parametr λ który pozwala skalować odległość odwzorowania między odwzorowaniem Tr a ϕ.

1. Wybieramy odwzorowanie ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich $\Psi \in \mathcal{P}$.
2. Normujemy odwzorowanie w sensie iloczynu Hilberta-Schmidta.
3. Rzutujemy odwzorowanie Tr na odwzorowanie Ψ, tak aby $(\alpha |C_\Psi\rangle - |C_{\mathrm{Tr}}\rangle) \perp |C_{\mathrm{Tr}}\rangle$.
4. Rozważamy rodzinę odwzorowań Φ_λ, dla $\lambda \in \mathbb{R}$ zdefiniowaną jako $|C_{\Phi_\lambda}\rangle = |C_{\mathrm{Tr}}\rangle + \lambda |C_\Psi\rangle$.
5. Badamy k-dodatniość nowego odwzorowania scharakteryzowanego przez parametr λ zdefiniowanego jako

$$|C_{\Phi_\lambda}\rangle = (1-\lambda)|C_{\mathrm{Tr}}\rangle + \lambda |C_\Psi\rangle. \tag{5.13}$$

Badając k-dodatniość odwzorowania Φ_λ pozwoli nam poruszać się po odcinku między Tr a ϕ pozwalając nam określać kiedy zaczyna się 2-dodatniość i całkowita dodatniość.

Załóżmy, że znaleźliśmy parametr λ dla którego odwzorowanie Φ_λ będzie 2-dodatnie tak aby było na ścianie $\mathcal{P}_2$. Budując hiperpowierzchnię w tym punkcie tak, aby była prostopadła do odcinka łączącego $|C_\phi\rangle$ oraz $|C_{\mathrm{Tr}}\rangle$, moglibyśmy zdeterminować, czy punkt w którym znajduje się odwzorowanie jest eksponowany. Jeśli punkt jest eksponowany, to nie istnieje żaden inny punkt z tej hiperpowierzchni który po dodaniu do odwzorowania Φ_λ byłby dalej 2-dodatni.



Rysunek 5.1: Schematyczna ilustracja stożków $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ oraz w środku tych stożków odwzorowanie Tr. Z lewej strony rzut poglądowy z góry, z prawej rzut poprzeczny. Element stożka $|C_{\mathrm{Tr}}\rangle$ rzutujemy na $|C_\phi\rangle$, ponieważ wysokości (w takim sensie jak na ilustracji) mogą się różnić, normujemy odwzorowanie ϕ w taki sposób aby oba odwzorowania były na tej samej wysokości. Definiując nowe odwzorowanie $|C_{\Phi_\lambda}\rangle$ jest ono po drugiej stronie stożka i parametrem λ kontrolujemy położenie odwzorowania wzdłuż odcinka od centrum $|C_{\mathrm{Tr}}\rangle$ stożków $\mathcal{P}_k$.

5.1 Odwzorowanie Millera-Olkiewicza

Przeanalizujmy odwzorowania działające na niskowymiarowych algebrach macierzowych które jest ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich. Wykorzystując metodę charakteryzacji z poprzedniego rozdziału na przykładzie odwzorowania Millera-Olkiewicza (M-O), możemy otrzymać odwzorowanie, dla którego 2-dodatniość implikuje całkowitą dodatniość. To cokolwiek niejasne stwierdzenie wytłumaczymy w następujący sposób. Rozważamy odwzorowanie M-O które jest ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich i 'przesuwamy je' w stronę odwzorowań całkowicie dodatnich poprzez dodanie $\lambda\,\mathrm{Tr}$. W pewnym momencie tak zmodyfikowane odwzorowanie M-O trafia w ścianę stożka $\mathcal{P}_2$ odwzorowań 2-dodatnich. Zaskakujące jest to, że to odwzorowanie jest już całkowicie dodatnie. Nie może być ono ekstremalne w stożku $\mathcal{P}_\infty$ odwzorowań całkowicie dodatnich, bo leży we wnętrzu stożka $\mathcal{P}_1$. Oznacza to, że stożki $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_\infty$ stykają się wzdłuż pewnej nietrywialnej ściany. Według naszej wiedzy, tego typu zależność między stożkami $\mathcal{P}_k$ dla różnych k nie była dotychczas zaobserwowana.

Rozważmy odwzorowanie Millera-Olkiewicza [MO14] z przykładu 4.4.

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_{11}+x_{22}) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{13} \\ 0 & \frac{1}{2}(x_{11}+x_{22}) & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{32} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_{31} & \frac{1}{\sqrt{2}}x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Pokazaliśmy wcześniej, że przepisując odwzorowanie ϕ na postać

$$\phi_\lambda = \lambda \operatorname{Tr} - \psi_{CP} \tag{5.15}$$

jesteśmy w stanie uzyskać odwzorowanie 2-dodatnie które jest całkowicie dodatnie dla $\lambda \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Odwzorowanie Millera-Olkiewicza jest ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich, co więcej jest ono również eksponowane [MR17]. W świetle otrzymanego wyniku z przykładu 4.4 możemy wywnioskować, że istnieje wspólna ściana dla stożków odwzorowań 2-dodatnich oraz całkowicie dodatnich.

Twierdzenie 5.2. *Dla dowolnego odwzorowania liniowego $\Psi \in \mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_3)$ warunkiem koniecznym dla ekstremalności w stożku odwzorowań 2-dodatnich $\mathcal{P}_2$ jest, jeśli dla stowarzyszonej z tym odwzorowaniem macierz Choi $C_\Psi \in \mathbb{M}_3(\mathbb{M}_3)$ spełnia*

$$\Big(\langle 2| \otimes \langle 3| - \langle 3| \otimes \langle 2|\Big) C_\Psi \Big(|2\rangle \otimes |3\rangle - |3\rangle \otimes |2\rangle\Big) \geq 0. \tag{5.16}$$

Dowód. Rozważmy stożek odwzorowań 2-dodatnich $\mathcal{P}_2$ oraz stożek operatorów dodatnich w $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ z liczbą Schmidta nie większą niż 2, który będziemy oznaczać jako $\mathcal{S}_2$. Zdefiniujmy formę dualną $\langle \Phi | Z \rangle_d$ dla $\mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_3) \ni \Phi = \phi_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ gdzie rozważamy zmodyfikowane odwzorowanie M-O dla parametru $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $Z \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3) \simeq \mathbb{M}_3 \otimes \mathbb{M}_3$. Zauważmy, że dla $\mathcal{P}_2$ oraz $\mathcal{S}_2$ zachodzi

$$\mathcal{S}_2 = \{Z \in \mathbb{M}_3 \otimes \mathbb{M}_3 : \quad \langle \Phi | Z \rangle_d \geq 0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{P}_2\}, \tag{5.17}$$

oraz

$$\mathcal{P}_2 = \{\Phi \in \mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_3) : \quad \langle \Phi | Z \rangle_d \geq 0 \quad \forall Z \in \mathcal{S}_2\}. \tag{5.18}$$

Zbiór punktów ekstremalnych w $\mathcal{S}_2$ definiujemy jako

$$Ext(\mathcal{S}_2) = \{|\xi\rangle\langle\xi| : \quad |\xi\rangle \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3, \quad SR(|\xi\rangle) \leq 2\}. \tag{5.19}$$

Rozważmy zatem wektor $|\xi\rangle \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ taki, że $SR(|\xi\rangle) = 2$ o postaci $|\xi\rangle = \alpha_1 |x_1\rangle \otimes |y_1\rangle + \alpha_2 |x_2\rangle \otimes |y_2\rangle$, w związku z czym mamy

$$|\xi\rangle\langle\xi| = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \alpha_j \, |x_i\rangle\langle x_j| \otimes |y_i\rangle\langle y_j| \,. \tag{5.20}$$

gdzie $|x_i\rangle = \sum_{k=1}^{2} x_{ik} |k\rangle$ oraz $|y_i\rangle = \sum_{k=1}^{2} y_{ik} |k\rangle$.

Zdefiniujmy następującą formę biliniową pomiędzy $\mathcal{S}_2$ oraz $\mathcal{P}_2$, zgodnie z (5.2)

$$\langle \Phi | X \otimes Y \rangle = \operatorname{Tr}\Big(\Phi(X) Y^T\Big), \tag{5.21}$$

gdzie $\Phi \in \mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_3)$, $X \in \mathbb{M}_3$, $Y \in \mathbb{M}_3$.

Znajdziemy ścianę dualną $\{\Phi\}^* = \{Z \in \mathcal{S}_2 : \langle \Phi | Z \rangle = 0\}$, zatem

$$\langle \Phi || \xi \rangle\langle \xi | \rangle_d = \sum_{ij=1}^{2} \alpha_i \alpha_j \operatorname{Tr}\Big(\Phi(|x_i\rangle\langle x_j|)\, |\overline{y_j}\rangle\langle \overline{y_i}|\Big) \tag{5.22}$$

$$= \sum_{ij=1}^{2} \alpha_i \alpha_j \left[\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} x_{i1}\overline{x}_{j1} + \frac{1+\sqrt{2}}{2} x_{i2}\overline{x}_{j2} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{i3}\overline{x}_{j3} \right) \left(y_{i1}\overline{y}_{j1} + y_{i2}\overline{y}_{j2} \right) \right. \tag{5.23}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} x_{i1}\overline{x}_{j3} y_{i1}\overline{y}_{j3} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{i3}\overline{x}_{j2} y_{i2}\overline{y}_{j3} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{i3}\overline{x}_{j1} y_{i3}\overline{y}_{j1} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{i2}\overline{x}_{j3} y_{i3}\overline{y}_{j2} \tag{5.24}$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x_{i1}\overline{x}_{j1} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{i2}\overline{x}_{j2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{i3}\overline{x}_{j3} \right) y_{i3}\overline{y}_{j3} \right) \right] \tag{5.25}$$

$$= \alpha_1^2 \left[\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} |x_{11}|^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} |x_{12}|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} |x_{13}|^2 \right) \left(|y_{11}|^2 + |y_{12}|^2 \right) \right. \tag{5.26}$$

$$+ \sqrt{2}\operatorname{Re}\{x_{11}\overline{x}_{13} y_{11}\overline{y}_{13}\} + \sqrt{2}\operatorname{Re}\{x_{13}\overline{x}_{12} y_{12}\overline{y}_{13}\} \tag{5.27}$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} |x_{11}|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} |x_{12}|^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} |x_{13}|^2 \right) |y_{13}|^2 \right) \right] \tag{5.28}$$

$$+ \alpha_2^2 \left[\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} |x_{21}|^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} |x_{22}|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} |x_{23}|^2 \right) \left(|y_{21}|^2 + |y_{22}|^2 \right) \right. \tag{5.29}$$

$$+ \sqrt{2}\operatorname{Re}\{x_{21}\overline{x}_{23} y_{21}\overline{y}_{23}\} + \sqrt{2}\operatorname{Re}\{x_{23}\overline{x}_{22} y_{22}\overline{y}_{23}\} \tag{5.30}$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} |x_{21}|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} |x_{22}|^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} |x_{23}|^2 \right) |y_{23}|^2 \right) \right] \tag{5.31}$$

$$+ 2\alpha_1\alpha_2 \operatorname{Re}\left\{ \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} x_{11}\overline{x}_{21} + \frac{1+\sqrt{2}}{2} x_{12}\overline{x}_{22} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{13}\overline{x}_{23} \right) \left(y_{11}\overline{y}_{21} + y_{12}\overline{y}_{22} \right) \right. \tag{5.32}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} x_{11}\overline{x}_{23} y_{11}\overline{y}_{23} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{13}\overline{x}_{22} y_{12}\overline{y}_{23} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{13}\overline{x}_{21} y_{13}\overline{y}_{21} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{12}\overline{x}_{23} y_{13}\overline{y}_{22} \tag{5.33}$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x_{11}\overline{x}_{21} + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{12}\overline{x}_{22} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_{13}\overline{x}_{23} \right) y_{13}\overline{y}_{23} \right) \right\}. \tag{5.34}$$

Po wymnożeniu wszystkich członów i ich pogrupowaniu otrzymujemy sumy kwadratów następującej postaci

$$\langle\Phi||\xi\rangle\langle\xi|\rangle_d = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\alpha_1 x_{11}y_{11} + \alpha_1 x_{13}y_{13} + \alpha_2 x_{23}y_{23} + \alpha_2 x_{21}y_{21}\right|^2 \tag{5.35}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\alpha_1 x_{13}y_{12} + \alpha_1 x_{12}y_{13} + \alpha_2 x_{23}y_{22} + \alpha_2 x_{22}y_{23}\right|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\alpha_1 x_{13}y_{11} + \alpha_2 x_{23}y_{21}\right|^2 \tag{5.36}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\alpha_1 x_{11}y_{13} + \alpha_2 x_{21}y_{23}\right|^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left|\alpha_1 x_{12}y_{12} + \alpha_2 x_{22}y_{22}\right|^2 \tag{5.37}$$

$$+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\left|\alpha_1 x_{11}y_{12} + \alpha_2 x_{21}y_{22}\right|^2 + \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left|\alpha_1 x_{12}y_{11} + \alpha_2 x_{22}y_{21}\right|^2 \tag{5.38}$$

$$+\frac{1}{2}\left|\alpha_1 x_{11}y_{11} + \alpha_2 x_{21}y_{21}\right|^2 + \left|\alpha_1 x_{13}y_{13} + \alpha_2 x_{23}y_{23}\right|^2. \tag{5.39}$$

Aby $\langle\Phi||\xi\rangle\langle\xi|\rangle_d = 0$ następujące warunki muszą być spełnione

$$\begin{cases}
\alpha_1 x_{11}y_{11} + \alpha_2 x_{21}y_{21} = 0 \\
\alpha_1 x_{13}y_{13} + \alpha_2 x_{23}y_{23} = 0 \\
\alpha_1 x_{12}y_{12} + \alpha_2 x_{22}y_{22} = 0 \\
\alpha_1 x_{11}y_{12} + \alpha_2 x_{21}y_{22} = 0 \\
\alpha_1 x_{12}y_{11} + \alpha_2 x_{22}y_{21} = 0 \\
\alpha_1 x_{13}y_{11} + \alpha_2 x_{23}y_{21} = 0 \\
\alpha_1 x_{11}y_{13} + \alpha_2 x_{21}y_{23} = 0 \\
\alpha_1 x_{13}y_{12} + \alpha_1 x_{12}y_{13} + \alpha_2 x_{23} + y_{22} + \alpha_2 x_{22}y_{23} = 0.
\end{cases} \tag{5.40}$$

Zatem, $\{\Phi\}^* = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{ik} y_{il} = 0$ dla par $(k,l) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(3,1),(3,3)\}$ oraz z ostatniego warunku, że $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{i3} y_{i2} = -\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{i2} y_{i3}$.

Znaleźliśmy zatem warunki na ścianę dualną dla Φ, wykorzystując ponownie formę dualną do formy dualnej będziemy w stanie znaleźć ścianę w stożku odwzorowań 2-dodatnich. Niech Ψ będzie odwzorowaniem 2-dodatnim takim, że

$$\langle\Psi||\xi\rangle\langle\xi|\rangle_d = 0, \tag{5.41}$$

dla wszystkich $|\xi\rangle$ spełniających $\{\Phi\}^*$. Wtedy

$$\langle\Psi||\xi\rangle\langle\xi|\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i\alpha_j \operatorname{Tr}\Big(\Psi(\left|x_i\right\rangle\!\left\langle x_j\right|)\left|\overline{y}_j\right\rangle\!\left\langle\overline{y}_i\right|\Big) \tag{5.42}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i\alpha_j \sum_{k,l=1}^{3} x_{ik}\overline{x}_{jk} \sum_{s,t=1}^{3} \overline{y}_{js} y_{it} \operatorname{Tr}\{\Psi(|k\rangle\langle l|)\,|s\rangle\langle t|\} \tag{5.43}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i\alpha_j \sum_{k,l,s,t=1}^{3} x_{ik}\overline{x}_{jk}\overline{y}_{js} y_{it}\,\langle t|\,\Psi(|k\rangle\langle l|)\,|s\rangle \tag{5.44}$$

$$= \sum_{k,l,s,t=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}\alpha_i x_{ik} y_{it}\right)\left(\sum_{j=1}^{2}\overline{\alpha_j x_{jl} y_{js}}\right)\langle t|\,\Psi(|k\rangle\langle l|)\,|s\rangle \tag{5.45}$$

Korzystając z warunków danych przez (5.40) widzimy, że suma w (5.45) będzie niezerowa tylko dla następujących par liczb $(k,t),(l,s) \in \{(2,3),(3,2)\}$, w związku z czym możemy dalej napisać

$$\langle \Psi | |\xi\rangle\langle\xi| \rangle = \left| \sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{i2} y_{i3} \right|^2 \langle 3| \Psi(|2\rangle\langle 2|)\, |3\rangle \tag{5.46}$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{i2} y_{i3} \right) \left(\sum_{i=1}^{2} \overline{\alpha_i x_{i3} y_{i2}} \right) \langle 3| \Psi(|2\rangle\langle 3|)\, |2\rangle \tag{5.47}$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{i3} y_{u2} \right) \left(\sum_{i=1}^{2} \overline{\alpha_i x_{i2} y_{i3}} \right) \langle 2| \Psi(|3\rangle\langle 2|)\, |3\rangle \tag{5.48}$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{i3} y_{i2} \right|^2 \langle 2| \Psi(|3\rangle\langle 3|)\, |2\rangle \tag{5.49}$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_{i2} y_{i3} \right|^2 \Big(\langle 3| \Psi(|2\rangle\langle 2|)\, |3\rangle + \langle 2| \Psi(|3\rangle\langle 3|)\, |2\rangle \tag{5.50}$$

$$- \langle 3| \Psi(|2\rangle\langle 3|)\, |2\rangle - \langle 2| \Psi(|3\rangle\langle 2|)\, |3\rangle \Big). \tag{5.51}$$

Zauważmy, że mamy wyrażenie macierzowe typu

$$\begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{bmatrix}, \tag{5.52}$$

aby było ono dodatnio określone, musi zachodzić $ab - |c|^2 \geq 0$, liczbę zespoloną $|c|^2 = \mathrm{Re}\{c\}^2 + \mathrm{Im}\{c\}^2$ z drugiej strony $a + b = 2\,\mathrm{Re}\{c\}$ w związku z czym widzimy, że $\mathrm{Im}\{c\}^2 = 0$ a $\mathrm{Re}\{c\} = \frac{a+b}{2}^2$. Mamy zatem warunek, że $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Przepisując ostatnią równość (5.51) w reżimie macierzy Choi odwzorowania Ψ dostajemy, że dowolne odwzorowanie $\Psi \in \mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_3)$ jest ekstremalne w stożku odwzorowań 2-dodatnich jeśli zachodzi

$$\Big(\langle 2| \otimes \langle 3| - \langle 3| \otimes \langle 2| \Big) C_\Psi \Big(|2\rangle \otimes |3\rangle - |3\rangle \otimes |2\rangle \Big) \geq 0, \tag{5.53}$$

co oznacza, że w macierzy Choi musi być następująca struktura

$$C_\Psi = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right], \tag{5.54}$$

gdzie kropki oznaczają, że mogą znajdować się tam dowolne współczynniki, natomiast współczynnik a, oznacza, że w tych konkretnych miejscach macierzy Choi muszą znajdować się te same współczynniki o wartości a. ∎

Pokazaliśmy zatem warunek konieczny aby dowolne odwzorowanie $\Psi \in \mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_3)$ było ekstremalne w stożku odwzorowań 2-dodatnich. Byliśmy w stanie to pokazać, ponieważ wykazaliśmy wcześniej z Przykładu 4.4, że przesunięcie odwzorowania Millera-Olkiewicza w stronę odwzorowania Tr zmienia jego strukturę i własności. Takie przesunięcie w stronę odwzorowań całkowicie dodatnich powoduje, dodatnie na diagonali parametru $\sqrt{2}/2$ które w następstwie generuje to, że odwzorowanie jest 2-dodatnie oraz całkowicie dodatnie co oznacza, że w stożku $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{CP}$ musi istnieć wspólna ściana.

Stwierdzenie 5.3. *Jeśli macierz Choi postaci* (5.13) *dla którego odwzorowanie mu odpowiadające* Φ_λ *jest postaci* (5.15), *jest*

1. *całkowicie dodatnie dla* $-\frac{2}{7} \leq \lambda \leq \frac{2}{17}(3\sqrt{2}-1)$,

2. *dodatnie dla* $\lambda \geq -\frac{1}{2}$.

Dowód. Niech $|C_{\mathrm{Tr}}\rangle = \frac{1}{3}\mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_3$, oraz niech $\left|C_\phi\right\rangle$ będzie macierzą Choi odwzorowania Millera-Olkiewicza zdefiniowaną jako (5.14), wtedy

$$\left|C_\psi\right\rangle = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & 0 & \cdot \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{array}\right]. \tag{5.55}$$

Obliczając $\left\|\left|C_\psi\right\rangle\right\| = \left\langle C_\psi | C_\psi \right\rangle_{HS} = 4$ otrzymujemy, że $\frac{1}{2}\left|C_\psi\right\rangle$ stanowi unormowaną macierz Choi w sensie iloczynu skalarnego Hilberta-Schmidta i oznaczymy ją jako $|C_{MO}\rangle := \frac{1}{2}\left|C_\psi\right\rangle$. Rozważmy projektor $|C_{MO}\rangle$ na $|C_{\mathrm{Tr}}\rangle$ jako

$$|C_{\mathrm{Tr}}\rangle \langle C_{\mathrm{Tr}} | C_{MO}\rangle_{HS} = \frac{1}{2}|C_{\mathrm{Tr}}\rangle . \tag{5.56}$$

Co oznacza, że kąt między $|C_{MO}\rangle$ a $|C_{\mathrm{Tr}}\rangle$ wynosi $60°$. Znajdźmy liczbę α taką, że $(\alpha |C_{MO}\rangle - |C_{\mathrm{Tr}}\rangle) \perp |C_{\mathrm{Tr}}\rangle$

$$\langle C_{\mathrm{Tr}} | \alpha C_{MO}\rangle_{HS} - \langle C_{\mathrm{Tr}} | C_{\mathrm{Tr}}\rangle_{HS} = \frac{1}{2}\alpha - 1, \tag{5.57}$$

co oznacza, że dla $\alpha = 2$ otrzymamy kąt prosty między odwzorowaniem Tr a odwzorowaniem M-O względem iloczynu HS. Zdefiniujmy

$$|C_\Psi\rangle = 2\,|C_{MO}\rangle - |C_{\mathrm{Tr}}\rangle \tag{5.58}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cdot & -\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3} & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & -\frac{1}{3} & \cdot \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{2}{3}
\end{array}\right], \tag{5.59}$$

obliczając normę widzimy, że $\||C_\Psi\rangle\| = \sqrt{3}$. Roważmy rodzinę odwzorowań

$$\left|C_{\Phi_\lambda}\right\rangle = |C_{\mathrm{Tr}}\rangle + \lambda\,|C_\Psi\rangle = (1-\lambda)\,|C_{\mathrm{Tr}}\rangle + \lambda\,|C_{MO}\rangle \tag{5.60}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda \\
\cdot & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda & \cdot & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \cdot \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lambda
\end{array}\right]. \tag{5.61}$$

Badając minory powyższej macierzy widzimy, że mamy dwa znaczące minory

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{18}(-7\lambda^2 - 4\lambda + 2), \tag{5.62}$$

rozwiązaniem jest parabola, która jest dodatnia dla zakresu $\lambda \in [\frac{-3\sqrt{2}-2}{7}, \frac{3\sqrt{2}-2}{7}]$, z drugiej strony mamy następujący minor

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{18}(-7\lambda^2 - 5\lambda + 2), \tag{5.63}$$

rozwiązaniem jest parabola, która jest dodatnia dla zakresu $\lambda \in [-\frac{2}{7}, 1]$. Czyli wnioskujemy, że odwzorowanie Φ_λ jest całkowicie dodatnie dla $-\frac{2}{7} \le \lambda \le \frac{3\sqrt{2}-2}{7}$. Aby zbadać dodatniość zauważmy, że korzystając z izomorfizmu odwrotnego, możemy odzyskać odwzorowanie z postaci macierzy Choi $\left|C_{\Phi_\lambda}\right\rangle$, czyli

$$\Phi_\lambda((x_{ij}))$$
$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} (2+\lambda)x_{11}+(2+\lambda)x_{22}+(2-2\lambda)x_{33} & 0 & 3\sqrt{2}\lambda x_{13} \\ 0 & (2+\lambda)x_{11}+(2+\lambda)x_{22}+(2-2\lambda)x_{33} & 3\sqrt{2}\lambda x_{32} \\ 3\sqrt{2}\lambda x_{31} & 3\sqrt{2}\lambda x_{23} & (2-2\lambda)x_{11}+(2+2\lambda)x_{22}+(2+4\lambda)x_{33} \end{bmatrix}.$$

Zbadajmy dodatniość na stanie czystym, czyli $\Phi_\lambda(|\xi\rangle\langle\xi|)$, gdzie $|\xi\rangle = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T$ i policzmy wyznacznik.

$$\det\Phi_\lambda = [(2+\lambda)|\xi_1|^2+(2+\lambda)|\xi_2|^2+(2-2\lambda)|\xi_3|^2] \tag{5.64}$$
$$[(2-2\lambda)|\xi_1|^2+(2-2\lambda)|\xi_2|^2+(2+4\lambda)|\xi_3|^2] - 18\lambda^2|\xi_1|^2|\xi_3|^2 \geq 0, \tag{5.65}$$

wybieramy $\xi_2 = 0$ i liczmy dalej

$$\det\Phi_\lambda = (2+\lambda)(2-2\lambda)|\xi_1|^4+(2+4\lambda)(2-2\lambda)|\xi_3|^4 \tag{5.66}$$
$$+[(2+\lambda)(2+4\lambda)+(2-2\lambda)^2-18\lambda^2]|\xi_1|^2|\xi_3|^2 \tag{5.67}$$
$$= (4-2\lambda-2\lambda^2)|\xi_1|^4+(4+4\lambda-8\lambda^2)|\xi_3|^4+(8+2\lambda-10\lambda^2)|\xi_1|^2|\xi_3|^2, \tag{5.68}$$

rozwiązaniem równania $8+2\lambda-10\lambda^2$ są $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = -\frac{5}{4}$, w związku z czym, możemy zapisać, że $-10(\lambda-1)(\lambda+\frac{4}{5}) = (2-2\lambda)(4+5\lambda)$ oraz wstawiając do wyznacznika dostajemy, że

$$\det\Phi_\lambda = (2-2\lambda)[(2+\lambda)|\xi_1|^4+(2+4\lambda)|\xi_3|^4+(4+5\lambda)|\xi_1|^2+|\xi_3|^2] \geq 0, \tag{5.69}$$

którego rozwiązaniem jest $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, co stanowi warunek konieczny.

Zauważmy, że odwzorowanie Φ_λ jak jest dodatnie to nie jest 2-dodatnie. Niech $X = e_{11}\otimes e_{33}+e_{12}\otimes e_{32}+e_{21}\otimes e_{23}+e_{22}\otimes e_{22}$, wtedy

$$\Phi_\lambda^{(2)}(X) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda \end{array}\right], \tag{5.70}$$

analizując minory główne widzimy, że

$$\Phi_\lambda^{(2)} \geq 0 \iff \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda \geq 0, \tag{5.71}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lambda \geq 0, \tag{5.72}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\lambda \geq 0, \tag{5.73}$$
$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda\right)^2-\frac{1}{2}\lambda^2 \geq 0, \tag{5.74}$$

z których wnioskujemy, że Φ_λ jest 2-dodatnie dla $\lambda \in [-\frac{2}{7}, \frac{3\sqrt{2}-2}{7}]$. ■

Sprawdźmy, czy dla parametrów $\lambda = \{-\frac{2}{7}, -\frac{1}{2}\}$ zachodzi Twierdzenie 5.2.

$$\left|C_{\Phi_{-\frac{2}{7}}}\right\rangle = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\sqrt{2} \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & -\sqrt{2} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\sqrt{2} & \cdot & 3 & \cdot \\ -\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right], \tag{5.75}$$

$$\left|C_{\Phi_{-\frac{1}{2}}}\right\rangle = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\sqrt{2} \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & -\sqrt{2} & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\sqrt{2} & \cdot & 2 & \cdot \\ -\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right], \tag{5.76}$$

widać, że nie są spełnione warunki z Twierdzenia w związku z czym wnioskujemy, że odwzorowanie Φ_λ bazujące na konstrukcji odwzorowania Millera-Olkiewicza po drugiej stronie stożka odwzorowań dodatnich $\mathcal{P}$ nie jest ekstremalne w stożku odwzorowań 2-dodatnich.

5.2 Odwzorowanie Choi i dalsze badania

Zbadajmy uogólnione odwzorowanie Choi z Przykładu 4.3. Z przykładu 3.8 widzimy, że przy odpowiednio dobranych parametrach a, b, c odwzorowanie to może być nierozkładalne jak i rozkładalne. Stosując procedurę badania geometrycznego stożka $\mathcal{P}_k$ macierz Choi odwzorowania uogólnionego Choia [CKL92] ma postać

$$\left|C_{\phi_{[a,b,c]}}\right\rangle = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a-1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & a-1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & a-1 \end{array}\right]. \tag{5.77}$$

Normując macierz Choi dostajemy, że

$$\left\langle C_{\mathrm{Tr}} \middle| C_{\phi_{[a,b,c]}} \right\rangle = \frac{1}{3} 3(a+b+c-1) = a+b+c-1, \tag{5.78}$$

dla uproszczenia wprowadźmy odznaczenie $s := a + b + c - 1$. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\left|C_{\psi}\right\rangle = \frac{1}{s}\left|C_{\phi_{[a,b,c]}}\right\rangle - \left|C_{\mathrm{Tr}}\right\rangle, \tag{5.79}$$

mając powyższe odwzorowanie możemy zdefiniować następną jednoparametrową rodzinę odwzorowań (ze względu na λ)

$$\left|C_{\phi_{\lambda}}\right\rangle = \left|C_{\mathrm{Tr}}\right\rangle + \lambda\left|C_{\psi}\right\rangle = \frac{\lambda}{s}\left|C_{\phi_{[a,b,c]}}\right\rangle + (1-\lambda)\left|C_{\mathrm{Tr}}\right\rangle, \tag{5.80}$$

która ma postać macierzową

$$\left|C_{\phi_{\lambda}}\right\rangle = \frac{\lambda}{s}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a-1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & a-1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & a-1 \end{array}\right] + \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda)\mathbb{1}_3 \otimes \mathbb{1}_3 \tag{5.81}$$

$$= \frac{\lambda}{s}\left|C_{\phi_{[a+\frac{s}{3\lambda}(1-\lambda),b+\frac{s}{3\lambda}(1-\lambda),c+\frac{s}{3\lambda}(1-\lambda)]}}\right\rangle. \tag{5.82}$$

Warunki na dodatniość przepisują się następująco

1. $a + \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda) \geq 1$,
2. $a + b + c + +\frac{s}{\lambda}(1-\lambda) \geq 3$,
3. $(b + \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda))(c + \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda)) \geq (2 - a - \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda))^2$ gdy $a + \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda) \geq 2$.

Przeanalizujmy te warunki względem parametru λ.

Z warunku 1 dostajemy, że

$$\frac{3\lambda a + s - \lambda s}{3\lambda} - 1 \geq 0 \tag{5.83}$$

$$\frac{3\lambda a + s - \lambda s - 3\lambda}{3\lambda} - 1 \geq 0 \tag{5.84}$$

$$\lambda(\lambda(3a - s - 3) + s) \geq 0 \tag{5.85}$$

$$(3a - s - 3)\lambda\Big(\lambda + \frac{a+b+c-1}{2a-b-c-2}\Big) \geq 0 \tag{5.86}$$

Mamy zatem dwa rozwiązania, dla $2a - b - c - 2 > 0$ widzimy, że

$$\lambda \leq -\frac{a+b+c-1}{2a-b-c-2} \quad \text{lub} \quad \lambda \geq 0, \tag{5.87}$$

lub $2a - bc - 2 < 0$ wtedy

$$0 \leq \lambda \leq -\frac{a+b+c-1}{2a-b-c-2}. \tag{5.88}$$

Z drugiego warunku 2

$$\frac{\lambda(a+b+c)+s-s\lambda-3\lambda}{\lambda} \geq 0 \tag{5.89}$$
$$\lambda(\lambda(a+b+c-s-3)+s) \geq 0 \tag{5.90}$$
$$\lambda(-2\lambda+s) \geq 0 \tag{5.91}$$
$$-2\lambda(\lambda-\frac{s}{2}) \geq 0 \tag{5.92}$$

czyli dostajemy, że

$$0 \leq \lambda \leq \frac{a+b+c-1}{2}. \tag{5.93}$$

Ostatni warunek 3 mówi nam, że

$$\frac{1}{9\lambda^2}(3\lambda b+s-s\lambda)(3\lambda c+s-s\lambda) \geq \frac{1}{9\lambda^2}(6\lambda-3\lambda a-s+s\lambda)^2 \tag{5.94}$$
$$(9bc-3bs-3cs-36-9a^2+36a-12s+6as)\lambda^2+(3bs+3cs+12s-6as)\lambda \geq 0, \tag{5.95}$$

wstawiając $s=a+b+c-1$ oraz porządkując wyrazy dostajemy, że wyrazy stojące przy λ^2 to

$$A = -9a^2-3b^2-3c^2-3ab-3ac+3bc+24a-9b-9c-24 \tag{5.96}$$
$$= (6a-3b-3c-12)(a+b+c-1)-9a^2+36a+9bc-36, \tag{5.97}$$

natomiast wyrazy stojące przy λ to

$$B = (-6a+3b+3c+12)(a+b+c-1), \tag{5.98}$$

w związku z czym mamy nierówność

$$A\lambda^2+B\lambda \geq 0 \tag{5.99}$$
$$A\lambda(\lambda+\frac{B}{A}) \geq 0 \tag{5.100}$$

dostając jedno z rozwiązań

$$\lambda_1 = -\frac{B}{A} = \frac{(6a-3b-3c-12)s}{(6a-3b-3c-12)s-9((a-2)^2-bc)}. \tag{5.101}$$

W szczególności interesujący jest przypadek gdy odwzorowanie $\phi_{[a,b,c]}$ jest 2-dodatnie, czyli gdy zachodzi warunek $bc=(3-a)(b+c)$ dla $2 \leq a \leq 3$. Przepisując te warunki dostajemy, że

$$2 \leq a+\frac{s}{3\lambda}(1-\lambda) \leq 3 \tag{5.102}$$
$$6\lambda \leq 3\lambda a+s-s\lambda \leq 9\lambda \tag{5.103}$$
$$(6-3a+s)\lambda \leq s, \quad \text{oraz} \quad (3a-s-9)\lambda \leq -s, \tag{5.104}$$

w związku z czym wnioskujemy, że

$$\frac{s}{s+3(3-a)} \leq \lambda \leq \frac{s}{s+3(2-a)}. \tag{5.105}$$

Z warunku $bc = (3-a)(b+c)$ dostajemy, że

$$\left(b + \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda)\right)\left(c + \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda)\right) = \left(3 - a - \frac{s}{3\lambda}(1-\lambda)\right)\left(b + c + \frac{2s}{3\lambda}(1-\lambda)\right) \tag{5.106}$$

$$(3b\lambda + s - s\lambda)(3c\lambda + s - s\lambda) = (9\lambda - 3a\lambda - s + s\lambda)(3(b+c)\lambda + 2s - 2s\lambda), \tag{5.107}$$

po przekształceniach dostajemy, że

$$(3 - s^2 + 3as - 5s)\lambda^2 - 4s\lambda + s^2 = 0, \tag{5.108}$$

którego rozwiązaniami są

$$\lambda_{1/2} = 2s \pm \sqrt{2s^2 + 2s^3(s - 3a + 5)}. \tag{5.109}$$

Przykład 5.4. Rozważmy oryginalne odwzorowanie Choi które odpowiada parametrom $(2,0,1)$, wtedy przypomnijmy jest dodatnie i ekstremalne w $\mathcal{P}$. Nowe parametry dla ϕ_λ prezentują się następująco

$$a \mapsto 2 - \left(\frac{2}{3}(\lambda - 1)\right)\frac{1}{\lambda}, \tag{5.110}$$

$$b \mapsto -\left(\frac{2}{3}(\lambda - 1)\right)\frac{1}{\lambda}, \tag{5.111}$$

$$c \mapsto 1 - \left(\frac{2}{3}(\lambda - 1)\right)\frac{1}{\lambda}, \tag{5.112}$$

$$\tag{5.113}$$

Rozwiązując równanie (5.106) dostajemy, że $\lambda_1 = 4 + 2\sqrt{3}$ oraz $\lambda_2 = 4 - 2\sqrt{3}$. Ponieważ interesują nas λ z zakresu $[0,1]$ to ograniczymy się do λ_2 i odrzucamy rozwiązanie λ_1. Tak dobrana λ_2 gwarantuje nam, że jesteśmy z odwzorowaniem ϕ_{λ_2} w stożku odwzorowań 2-dodatnich. Nowe parametry dla λ_2 to

$$a \mapsto_{\lambda_2} a' = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{5.114}$$

$$b \mapsto_{\lambda_2} b' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{5.115}$$

$$c \mapsto_{\lambda_2} c' = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{5.116}$$

Aby pokazać, że odwzorowanie jest eksponowane w stożku odwzorowań 2-dodatnich, rozważmy $|Q\rangle = (q_{ij,kl}) \in \mathbb{M}_3(\mathbb{M}_3)$ taki, że

$$\frac{x_1}{\sqrt{3}+3}a' + \frac{x_2}{\sqrt{3}}b' + \frac{x_3}{\sqrt{3}+3}a' + \sum_{i\neq j} q_{ij,ij} = 0, \tag{5.117}$$

gdzie $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Aby ϕ_{λ_2} było eksponowane w $\mathcal{P}_2$, wystarczy pokazać, że

$$|C_\Psi\rangle = \left|C_{\phi_{\lambda_2}}\right\rangle + |Q\rangle \notin \mathcal{P}_2 \tag{5.118}$$

nie jest 2-dodatnie, co będzie oznaczać, że punkt w stożku $\mathcal{P}_2$ w którym znajduje się ϕ_{λ_2} jest jedynym punktem dla którego odwzorowanie to jest 2-dodatnie.

Rozdział 6

Podsumowanie

Celem przedstawionej pracy było, podanie konstrukcji jak najogólniejszych klas odwzorowań k-dodatnich które nie są $(k+1)$-dodatnie, w szczególności dla odwzorowań na niskowymiarowych algebrach macierzowych. Dokonaliśmy również analizy struktury odwzorowań k-dodatnich względem stożków $\mathcal{P}_k$. Bardziej szczegółowy opis zawartości poszczególnych rozdziałów znajduje się poniżej:

Rozdział drugi stanowi wprowadzenia do analizy wypukłej oraz przestrzeni Hilberta jak i obiektów znajdujących się na tej przestrzeni. Jednym z celów było przedstawienie obiektów jak i relacji niezbędnych do opisu kwantowych układów złożonych. Drugim celem było przedstawienie różnych klas operatorów żyjących na tych przestrzeniach. W szczególności interesujące operatory dodatnie. Wkład własny polegał w tym przypadku na podaniu wielu przykładów które ilustrowały działanie takich operatorów dodatnich jako świadków k-splątania.

W rozdziale trzecim przedstawiono definicje wraz z podstawowymi własnościami odwzorowania dodatnie. Zdefiniowano pojęcie k-dodatniości czy rozkładalności dla operatorów dodatnich. W szczególności relacje jakie mają odwzorowania k-dodatnie a stany k-splątane, czyli takie o liczbie Schmidta nie większej, niż k. W dalszej części zajmujemy się badaniem różnych podklas odwzorowań dodatnich. Zostają podane przykłady znanych konstrukcji odwzorowań k-dodatnich oraz ich limitacje.

W rozdziale czwartym przedstawiamy konstrukcję odwzorowań k-dodatnich. Dokonujemy szczegółowej analizy podanej konstrukcji odwzorowań k-dodatnich. Następnie podajemy konkretny przykład odwzorowania k-dodatniego oraz szczegółowo opisujemy jego własności. Następnie podajemy dodatkowe metody numeryczne dzięki którym możemy dokładniej zbadać własności odwzorowań, ze względu na własność rozkładalności odwzorowania. Przedstawiamy przykładowe modyfikację do podanych odwzorowań pokazując, że modyfikacje te mogą generować odwzorowania k-dodatnie i nie $(k+1)$-dodatnie które są nierozkładalne na niskowymniarowych algebrach macierzowych.

W rozdziale piątym zajmujemy się analizą odwzorowań niskowymiarowych $\mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_3)$ które są ekstremalne w stożku odwzorowań dodatnich. Podajemy warunek konieczny jaki musi mieć struktura macierzy Choi danego odwzorowania aby odwzorowanie było ekstremalne w stożku odwzorowań 2-dodatnich. Dodatkowo zaobserwowaliśmy ciekawe zachowanie zmodyfikowanego odwzorowania Millera-Olkiewicza, na pokazaniu istnienia wspólnej ściany stożków odwzorowań 2-dodatnich i stożku odwzorowań całkowicie dodatnich. Na zakończenie prezentujemy wprowadzoną przez nas procedurę, dzięki której możemy badać stożki odwzorowań k-dodatnich na przykładzie odwzorowania Choi.

Podsumowując mamy nadzieję, że przeprowadzone przez nas badania, przyczynią się do lepszego zrozumienia struktury odwzorowań dodatnich a co za tym idzie struktury kwantowych stanów splątanych. Na czas pisania tej pracy nie dysponujemy przykładem odwzorowania 2-dodatnie nierozkładalnego dla wymiarów co najmniej $\mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_4)$ lecz wciąż pozostaje to przedmiotem badań.

Po paru latach badań nad odwzorowaniami k-dodatnimi autor uważa, że wszystkie odwzorowania 2-dodatnie na niskowymiarowych algebrach macierzowych, w szczególności $\mathcal{B}(\mathbb{M}_3, \mathbb{M}_4)$ są rozkładalne.

Dodatek A

Program MATLAB

A.1 Test na rozkładalność 1

Program Matlab do sprawdzania rozkładalności zdefiniowany w (4.102). Funkcja przyjmuję parametry takie jak macierz Choi odwzorowania dla którego chcemy sprawdzić rozkładalność, oraz wymiary m i n przestrzeni Hilberta. W wyniku, program pododaje min ze śladu macierzy Choi oraz stanu ρ PPT, po którym odbywa się optymalizacja.

```
function [slad] = SDP_witness_phi(choi_matrix,m,n)
cvx_begin sdp quiet
    variable s(n*m,n*m) semidefinite
    minimize( trace(choi_matrix*s) );
    subject to
        trace(s)==1;
        PartialTranspose(s,2,[m,n]) >= 0;
cvx_end
slad = trace(choi_matrix*s);
end
```

A.2 Test na rozkładalność 2

Program Matlab do sprawdzania nierozkładalności zdefiniowany w (4.103). Funkcja przyjmuje parametry takie jak macierz Choi odwzorowania ϕ oraz wymiary m i n. W wyniku, program podaje min ze śladu sumy dwóch operatorów P_{tt} i Q_{tt} których ślad będzie nieujemny jeśli odwzorowanie ϕ jest rozkładalne.

```
function[dec,P,Q] = sdp_decomp(choi_matrix,m,n)
cvx_begin sdp quiet
variable Qtt(n*m,n*m) semidefinite
variable Ptt(n*m,n*m) semidefinite
variable P(n*m,n*m)) semidefinite
variable Q(n*m),n*m) semidefinite
minimize( trace(Ptt+Qtt));
subject to
choi_matrix-P-PartialTranspose(Q,1,[m,n])==Ptt-Qtt;
cvx_end
dec=trace(Ptt+Qtt);
end
```

Bibliografia

[ABLS01] A. Acín, D. Bruß, M. Lewenstein, and A. Sanpera. Classification of mixed three-qubit states. *Phys. Rev. Lett.*, 87:040401, 2001.

[ACF03] Sergio Albeverio, Kai Chen, and Shao-Ming Fei. Generalized reduction criterion for separability of quantum states. *Phys. Rev. A*, 68:062313, Dec 2003.

[ADR82] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, 1982.

[AH06] Remigiusz Augusiak and Pawel Horodecki. Bound entanglement maximally violating bell inequalities: Quantum entanglement is not fully equivalent to cryptographic security. *Phys. Rev. A*, 74:010305, 2006.

[Bel64] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, 1964.

[BFP04] Fabio Benatti, Roberto Floreanini, and Marco Piani. Non-decomposable quantum dynamical semigroups and bound entangled states. *Open Systems and Information Dynamics*, 11, 2004.

[Bha97] Rajendra Bhatia. *Matrix Analysis*. Springer New York, NY, 1997.

[Bre06] Heinz-Peter Breuer. Optimal entanglement criterion for mixed quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 97:080501, 2006.

[BRSS22] Grigoriy Blekherman, Bogdan Raiţă, Isabelle Shankar, and Rainer Sinn. Weak and strong extremal biquadratics, 2022.

[BS20] Anita Buckley and Klemen Sivic. New examples of extremal positive linear maps. *Linear Algebra and its Applications*, 598, 2020.

[BSSV21] Greg Blekherman, Rainer Sinn, Gregory Smith, and Mauricio Velasco. Sums of squares: A real projective story. *Notices of the American Mathematical Society*, 68:1, 2021.

[Buc22] Anita Buckley. New examples of entangled states on $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$, 2022.

[CAG99] N. J. Cerf, C. Adami, and R. M. Gingrich. Reduction criterion for separability. *Phys. Rev. A*, 60:898–909, 1999.

[Car20] Daniel Cariello. Inequalities for the schmidt number of bipartite states. *Letters in Mathematical Physics*, 110, 2020.

[Cho75a] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Lin. Alg. Appl.*, 10:285, 1975.

[Cho75b] Man-Duen Choi. Positive semidefinite biquadratic forms. *Linear Algebra and its Applications*, 12(2):95–100, 1975.

[Cho80] Man-Duen Choi. Some assorted inequalities for positive linear maps on C^*-algebras. *Journal of Operator Theory*, 4:271–285, 1980.

[CK07] Dariusz Chruściński and Andrzej Kossakowski. On the structure of entanglement witnesses and new class of positive indecomposable maps. *Open Systems and Information Dynamics*, 14(3):275–294, 2007.

[CK09] Dariusz Chruściński and Andrzej Kossakowski. Spectral conditions for positive maps. *Comm. Math. Phys.*, 290:1051–1064, 2009.

[CKL92] Sung Je Cho, Seung-Hyeok Kye, and Sa Ge Lee. Generalized choi maps in three-dimensional matrix algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 171:213–224, 1992.

[CL77] Man-Duen Choi and Tsit-Yuen Lam. Extremal positive semidefinite forms. *Mathematische Annalen*, 231(1):1–18, 1977.

[CS12] Dariusz Chruściński and Gniewomir Sarbicki. Exposed positive maps: a sufficient condition. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(11):115304, March 2012.

[CW02] Kai Chen and Ling-An Wu. The generalized partial transposition criterion for separability of multipartite quantum states. *Physics Letters A*, 306:14–20, 2002.

[D01] W. Dür. Multipartite bound entangled states that violate bell's inequality. *Phys. Rev. Lett.*, 87:230402, 2001.

[Dir39] P. A. M. Dirac. A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35:416–418, 1939.

[DPS02] A. C. Doherty, Pablo A. Parrilo, and Federico M. Spedalieri. Distinguishing separable and entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, 88:187904, 2002.

[DPS04a] Andrew Doherty, Pablo Parrilo, and Federico Spedalieri. Complete family of separability criteria. *Physical Review A*, 69, 2004.

[DPS04b] Andrew C. Doherty, Pablo A. Parrilo, and Federico M. Spedalieri. Complete family of separability criteria. *Physical Review A*, 69(2), 2004.

[DS12] Chruściński Dariusz and Gniewomir Sarbicki. Exposed positive maps in $M_4(C)$. *Open Systems and Information Dynamics*, 19, 09 2012.

[EHM+23] Daniel Ebler, Michał Horodecki, Marcin Marciniak, Tomasz Młynik, Marco Túlio Quintino, and Michał Studziński. Optimal universal quantum circuits for unitary complex conjugation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 69(8):5069–5082, 2023.

[EK00] MYOUNG-HOE EOM and SEUNG-HYEOK KYE. Duality for positive linear maps in matrix algebras. *Mathematica Scandinavica*, 86(1):130–142, 2000.

[EK06] K. Eckert and H. Kreutzmann. Quantum-information-theory winter-semester, 2006. URL: `https://www.quantware.ups-tlse.fr/IHP2006/lectures/lewenstein2.pdf`. Last visited on 2023/09/01.

[Eke95] Ekert, Artur and Knight, Peter L. Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *American Journal of Physics*, 63:415–423, 1995.

[Enr18] Enrico Sindici and Marco Piani. Simple class of bound entangled states based on the properties of the antisymmetric subspace. *Phys. Rev. A*, 97:032319, 2018.

[EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.

[Fan51] Ky Fan. Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 37:760–766, 1951.

[FLJS06] Shao-Ming Fei, Xianqing Li-Jost, and Bao-Zhi Sun. A class of bound entangled states. *Physics Letters A*, 352:321–325, 2006.

[GB02] Leonid Gurvits and Howard Barnum. Largest separable balls around the maximally mixed bipartite quantum state. *Physical Review A*, 66, 04 2002.

[Gha08] Sevag Gharibian. Strong np-hardness of the quantum separability problem. *Quantum Information and Computation*, 10, 10 2008.

[Ha03] Kil-Chan Ha. A class of atomic positive linear maps in matrix algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 359(1):277–290, 2003.

[Hal06] William Hall. Constructions of indecomposable positive maps based on a new criterion for indecomposability. *arXiv: Quantum Physics*, 2006.

[HH99] Michał Horodecki and Paweł Horodecki. Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols. *Physical Review A*, 59:4206–4216, 1999.

[HHH96] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1):1–8, 1996.

[HHH99] Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Ryszard Horodecki. Bound entanglement can be activated. *Phys. Rev. Lett.*, 82:1056–1059, 1999.

[HHH01] Michal Horodecki, Pawel Horodecki, and Ryszard Horodecki. *Mixed-State Entanglement and Quantum Communication*, pages 151–195. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2001.

[HHHH09] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, 2009.

[HJ85] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.

[HK04] Kil-Chan Ha and Seung-Hyeok Kye. Construction of entangled states with positive partial transposes based on indecomposable positive linear maps. *Physics Letters A*, 325(5–6):315–323, May 2004.

[HK05] Kil-Chan Ha and Seung-Hyeok Kye. Construction of $3 \otimes 3$ entangled edge states with positive partial transposes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(41):9039, 2005.

[HK11] Kil-Chan Ha and Seung-Hyeok Kye. Entanglement witnesses arising from exposed positive linear maps. *Open Systems and Information Dynamics*, 18, 07 2011.

[HK12] Kil-Chan Ha and Seung-Hyeok Kye. Exposedness of choi-type entanglement witnesses and applications to lengths of separable states. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 20, 2012.

[HK14] Kil-Chan Ha and Seung-Hyeok Kye. Construction of exposed indecomposable positive linear maps between matrix algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 64, 10 2014.

[HKP03] Kil-Chan Ha, Seung-Hyeok Kye, and Young Sung Park. Entangled states with positive partial transposes arising from indecomposable positive linear maps. *Physics Letters A*, 313(3):163–174, June 2003.

[HLLMH18] Marcus Huber, Ludovico Lami, Cécilia Lancien, and Alexander Müller-Hermes. High-dimensional entanglement in states with positive partial transposition. *Phys. Rev. Lett.*, 121:200503, 2018.

[HLP$^+$12] Jinchuan Hou, Chi-Kwong Li, Yiu Poon, Xiaofei Qi, and Nung-Sing Sze. Criteria for k-positivity of linear maps. 2012.

[HLP$^+$13] Jinchuan Hou, Chi-Kwong Li, Yiu-Tung Poon, Xiaofei Qi, and Nung-Sing Sze. Criteria and new classes of k-positive maps, 2013.

[Hor97] Paweł Horodecki. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Physics Letters A*, 232:333–339, 1997.

[Hou10] Jinchuan Hou. A characterization of positive linear maps and criteria of entanglement for quantum states. *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical*, 43, 2010.

[Ish04] Satoshi Ishizaka. Bound entanglement provides convertibility of pure entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, 93:190501, 2004.

[Jam72] A. Jamiołkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, 1972.

[JK10] Nathaniel Johnston and David W. Kribs. A family of norms with applications in quantum information theory. *Journal of Mathematical Physics*, 51(8):082202, 2010.

[KMSZ17] Igor Klep, Scott McCullough, Klemen Sivic, and AljaZ Zalar. There Are Many More Positive Maps Than Completely Positive Maps. *International Mathematics Research Notices*, 2019(11):3313–3375, 2017.

[Kra71] K Kraus. General state changes in quantum theory. *Annals of Physics*, 64(2):311–335, 1971.

[Kra83] K. Kraus. *States, Effects and Operations. Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Kye12] Seung-Hyeok Kye. Facial structures for various notions of positivity and applications to the theory of entanglement. *Reviews in Mathematical Physics*, 25, 2012.

[Lax14] Peter D. Lax. *Functional Analysis*. Wiley-Interscience, 2014.

[LCK99] Maciej Lewenstein, J. Cirac, and S. Karnas. Separability and entanglement in 2xn composite quantum systems. 04 1999.

[Li94] Chi-Kwong Li. Some aspects of the theory of norms. *Linear Algebra and its Applications*, pages 71–100, 1994.

[Li99] Chi-Kwong Li. Norms, isometries, and isometry groups. *The American Mathematical Monthly*, 107, 12 1999.

[Lin75] Göran Lindblad. Completely positive maps and entropy inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 40(2):147–151, 1975.

[LMM06] Louis E. Labuschagne, Władysław A. Majewski, and Marcin Marciniak. On k-decomposability of positive maps. *Expositiones Mathematicae*, 24(2):103–125, 2006.

[Los92] L. Losonczi. Eigenvalues and eigenvectors of some tridiagonal matrices. *Acta Mathematica Hungarica*, 60(3):309–322, 1992.

[LW97] Chi-Kwong Li and Hugo J. Woerdeman. Special classes of positive and completely positive maps. *Linear Algebra and its Applications*, 255(1):247–258, 1997.

[Maj00] Wladyslaw Adam Majewski. Some remarks on separability of states. *arXiv: Quantum Physics*, 2000.

[Maj04a] Władysław Adam Majewski. On positive maps, entanglement and quantization. open systems and information dynamics. *Open Systems and Information Dynamics*, 11:43–52, 2004.

[Maj04b] Wladyslaw Adam Majewski. Positive maps, states, entanglement and all that; some old and new problems. *arXiv: Quantum Physics*, 2004.

[Maj12] Władysław A. Majewski. On the structure of positive maps: Finite-dimensional case. *Journal of Mathematical Physics*, 53(2):023515, 2012.

[Mar10] Marcin Marciniak. On extremal positive maps acting between type i factors. In *Banach Center Publications*. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 2010.

[Mar11] Marcin Marciniak. Rank properties of exposed positive maps. *Linear and Multilinear Algebra*, 61, 2011.

[MM01] Wladyslaw Adam Majewski and Marcin Marciniak. On a characterization of positive maps. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34:5863, 2001.

[MM04] Wladyslaw Adam Majewski and Marcin Marciniak. K-decomposability of positive maps. *Quantum probability and infinite dimensional analysis*, 12 2004.

[MO14] Marek Miller and Robert Olkiewicz. Stable subspaces of positive maps of matrix algebras. *Open Systems and Information Dynamics*, 22, 2014.

[MR17] Marcin Marciniak and Adam Rutkowski. Merging of positive maps: A construction of various classes of positive maps on matrix algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 529:215–257, September 2017.

[NC10] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.

[Osa91] Hiroyuki Osaka. Indecomposable positive maps in low dimensional matrix algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 153:73–83, 1991.

[Pas21] James E. Pascoe. The outer spectral radius and dynamics of completely positive maps. *Israel Journal of Mathematics*, 244(2):945–969, 2021.

[Pau03] Vern Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. 2003.

[Per96] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, 1996.

[Pia06] Marco Piani. Class of bound entangled states of $n + n$ qubits revealed by nondecomposable maps. *Phys. Rev. A*, 73:012345, 2006.

[PM07] Marco Piani and Caterina Mora. Class of positive-partial-transpose bound entangled states associated with almost any set of pure entangled states. *Physical Review A - PHYS REV A*, 75, 2007.

[RA07] Kedar Ranade and Mazhar Ali. The jamiołkowski isomorphism and a simplified proof for the correspondence between vectors having schmidt number k and k-positive maps. *Open Systems and Information Dynamics*, 14:371–378, 2007.

[Rob85a] A. Guyan Robertson. Positive projections on C^*-algebras and an extremal positive map. *Journal of The London Mathematical Society-second Series*, pages 133–140, 1985.

[Rob85b] A. Guyan Robertson. Positive Projections on C*-Algebras and an Extremal Positive Map. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-32(1):133–140, 1985.

[Roc70] Ralph Tyrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[Rud02] Oliver Rudolph. Some properties of the computable cross norm criterion for separability. *Physical Review A*, 67, 2002.

[Sch07] Erhard Schmidt. Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 63(4):433–476, 1907.

[Sch35] E. Schrodinger. Discussion of probability distributions between separated systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555–563, 1935.

[Sko10] Lukasz Skowronek. Dualities and positivity in the study of quantum entanglement. *International Journal of Quantum Information*, 08(05):721–754, 2010.

[SS05] Anil Shaji and E.C.G. Sudarshan. Who's afraid of not completely positive maps? *Physics Letters A*, 341(1):48–54, 2005.

[SS12] Lukasz Skowronek and Erling Størmer. Choi matrices, norms and entanglement associated with positive maps on matrix algebras. *Journal of Functional Analysis*, 262(2):639–647, 2012.

[SSZ09] Lukasz Skowronek, Erling Størmer, and Karol Życzkowski. Cones of positive maps and their duality relations. *Journal of Mathematical Physics*, 50(6):062106, 2009.

[Ste04] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Sti55a] W. F. Stinespring. Positive functions on C^*-algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6:211–216, 1955.

[Sti55b] W. Forrest Stinespring. Positive functions on C^*-algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6:211–216, 1955.

[Stø63] Erling Størmer. Positive linear maps of operator algebras. *Acta Mathematica*, 110:233–278, 1963.

[Stø82] Erling Størmer. Decomposable positive maps on C^*-algebras. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 86:402–402, 1982.

[Stø08] Erling Størmer. Duality of cones of positive maps. *Münster Journal of Mathematics*, 2, 2008.

[Stø10] Erling Størmer. A completely positive map associated with a positive map. *Pacific Journal of Mathematics*, 252:252, 2010.

[Stø20] Erling Størmer. Extension of positive maps. *MATHEMATICA SCANDINAVICA*, 126:256–258, 2020.

[Str35] Stefan Straszewicz. Uber exponierte punkte abgeschlossener punktmengen. *Fundamenta Mathematicae*, 24(1):139–143, 1935.

[Str14] Alexander Streltsov. *Quantum Correlations Beyond Entanglement*. Springer Cham, 2014.

[Stu99] Jos F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4):625–653, 1999.

[Sud05] A. Sudbery. *The power of entanglement*. Plenary lecture at the Fourth International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, Bulgaria, 2005.

[SWZ08] Stanisław J. Szarek, Elisabeth Werner, and Karol Życzkowski. Geometry of sets of quantum maps: A generic positive map acting on a high-dimensional system is not completely positive. *Journal of Mathematical Physics*, 49(3):032113, 2008.

[Tan86] Wai-Shing Tang. On positive linear maps between matrix algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 79:33–44, 1986.

[Ter98] Barbara Terhal. A family of indecomposable positive linear maps based on entangled quantum states. *Linear Algebra and its Applications*, 323:61–73, 1998.

[Ter00] Barbara M. Terhal. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, 271(5):319–326, 2000.

[Ter01] Barbara M. Terhal. Detecting quantum entanglement. *Theoretical Computer Science*, 287:313–335, 2001.

[TH00] Barbara M. Terhal and Paweł Horodecki. Schmidt number for density matrices. *Phys. Rev. A*, 61:040301, 2000.

[Tom85] Jun Tomiyama. On the geometry of positive maps in matrix algebras. ii. *Linear Algebra and its Applications*, 69:169–177, 1985.

[TT83] Toshiyuki Takasaki and Jun Tomiyama. On the geometry of positive maps in matrix algebras. *Mathematische Zeitschrift*, 184:101–108, 1983.

[TT88] Kotaro Tanahashi and Jun Tomiyama. Indecomposable positive maps in matrix algebras. *Canadian Mathematical Bulletin*, 31(3):308–317, 1988.

[VDD01] Frank Verstraete, Jeroen Dehaene, and Bart DeMoor. Local filtering operations on two qubits. *Phys. Rev. A*, 64:010101, 2001.

[Wor76a] S.L. Woronowicz. Positive maps of low dimensional matrix algebras. *Reports on Mathematical Physics*, 10(2):165–183, 1976.

[Wor76b] Stanislaw Woronowicz. Nonextendible positive maps. *Communications in Mathematical Physics*, 51, 10 1976.

[WW01] R. F. Werner and M. M. Wolf. Bound entangled gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3658–3661, 2001.

[YH05] David A. Yopp and Richard D. Hill. Extremals and exposed faces of the cone of positive maps. *Linear and Multilinear Algebra*, 53:167 – 174, 2005.

[YLT16] Yu Yang, Denny Leung, and Wai-Shing Tang. All 2-positive linear maps from $M_3(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$ are decomposable. *Linear Algebra and its Applications*, pages 233–247, 08 2016.

[ZC13] Justyna P. Zwolak and Dariusz Chruściński. New tools for investigating positive maps in matrix algebras. *Reports on Mathematical Physics*, 71(2):163–175, 2013.

[ZZZG07] Cheng-Jie Zhang, Yong-Sheng Zhang, Shun Zhang, and Guang-Can Guo. Optimal entanglement witnesses based on local orthogonal observables. *Phys. Rev. A*, 76:012334, Jul 2007.