Warszawa, 4 marca 2024

RECENZJA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ MACIEJA MROCZKOWSKIEGO

MACIEJ BORODZIK

Przedłożona rozprawa habilitacyjna nie spełnia ustawowych i zwyczajowych wymagań stawianych rozprawom habilitacyjnym. Wnoszę o niedopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

UZASADNIENIE

Jak będzie napisane niżej, przedłożony cykl artykułów dr. Mroczkowskiego nie stanowi istotnego wkładu w rozwój dyscypliny.

Przedstawienie dziedziny. Prace Mroczkowskiego koncentrują się wokół wyznaczania modułów kłębkowych (skein modules), dlatego w pierwszej kolejności opisana jest dziedzina, wraz z głównymi wynikami i celami.

Niech Y będzie zwartą rozmaitością trójwymiarową, a N modułem nad pierścieniem $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Kłębkowy moduł nawiasu Kauffmana (Kauffman bracket skein module, dalej: KBSM), jest modułem generowanym przez wszystkie obramowane sploty w Y: każdemu splotowi przypisujemy kopię N. Relacje są generowane przez lokalne relacje dla nawiasu Kauffmana. Teoria KBSM została wprowadzona przez Turaeva [Tur91] i Przytyckiego [Prz91]. Pierwsze dwie idee stojące za tą konstrukcją były następujące.

- pytanie czy lokalna relacja kłębkowa wyznacza wielomian Jonesa/nawias Kauffmana i jak to jest dla ogólnych rozmaitości trójwymiarowych?[1]
- pytanie czy wielomian Jonesa może być wykorzystany do uzyskania sensownego niezmiennika rozmaitości trójwymiarowych. Dla porównania, wielommian Alexandera, jako rząd modułu Alexandera, jest de facto niezmiennikiem 3-rozmaitości.

Niedługo potem okazało się, że jeśli N jest pierścieniem (najczęstszy przykład to $N = \mathbb{Q}(q)$), zaś $Y = \Sigma_g \times [0, 1]$, to ustawianie dwóch splotów jednego nad drugim (względem współrzędnej $[0, 1]$) zadaje strukturę algebry na KBSM. Mówimy wtedy o kłębkowej algebrze nawiasu Kauffmana (Kauffman bracket skein algebra, KBSA). Co ciekawe, algebra ta nie musi być przemienna, badanie elementów centralnych jest jedną z istotnych metod pracy [BW16, BW17]. Jeśli Y jest rozmaitością z brzegiem Σ, to KBSM dla Y jest w naturalny sposób modułem nad KBSA.

[1] Wielomian Jonesa jest wielomianem spełniającym relację kłębkową, ale dowód istnienia podany przez Jonesa używa reprezentacji warkoczy i jest nieoczywisty.

M.B

Istniało pytanie, czy KBSM są skończenie generowane (hipoteza Wittena). Na to pytanie twierdzącej odpowiedzi udzielono kilka lat temu [GJS23]. Ideą pracy jest zbadanie zachowania niezmienników KBSM przy brzegowej sumie spójnej i zastosowanie rozkładów Heegaarda.

Okazuje się, że związki KBSA z innymi dziedzinami matematyki są niezwykle głębokie. KBSA pozwala na skwantowanie reprezentacji $SL(2, \mathbb{C})$ grupy podstawowej Σ, [BFKB99, PS00]. Dalsze związki KBSA z kwantowaniem można znaleźć w [CL22]. [FKBL19] rozwija związki KBSA z teorią Teichmüllera. Jedno z ostatnich osiągnięć w dziedzinie dotyczy pokazania związków między KBSA a hipotezą objętościową [BWY21], jedną z najważniejszych otwartych hipotez w trójwymiarowych rozmaitościach.

Zastosowania modułów kłębkowych nie ograniczają się do świata rozmaitości 2 i 3-wymiarowych. Nowy kierunek badań został zapoczątkowany przez pracę Queffeleca i Wedricha [QW21] i znalazł swoje głębokie zastosowanie w tak zwanych modułów skłębionej lazanii (skein lasagna modules) wprowadzonych przez Morrisona, Walkera i Wedricha [MWW22] i rozwijanych później w pracach takich jak [MN22, MWW23, Che22]. Idee modułów kłębkowych zostają przeniesione na niezmienniki rozmaitości 4-wymiarowych. Cała rodzina homologicznych niezmienników splotów (homologie Khovanova, homologie Floera) daje niezmienniki rozmaitości 4-wymiarowych. Jakkolwiek praca [MWW22] nie dawała jasnych wskazówek jak efektywnie obliczać te moduły, ostatni wynik [RW24] wykorzystuje moduły skłębionej lazanii do rozróżnienia pary egzotycznych rozmaitości 4-wymiarowych. Jest to pierwszy w historii przykład niezmiennika niepochodzącego od teorii cechowania, który rozróżnia egzotyczne pary. Takie niezmienniki są świętym Graalem ekspertów w dziedzinie 4-wymiarowych rozmaitości, gdyż mogą prowadzić do obalenia gładkiej hipotezy Poincarégo w wymiarze 4.

Wracając na chwilę do rozprawy habilitacyjnej, jedną z jej głównych słabości jest to, że nie ma ona w zasadzie nic wspólnego z powyższymi wynikami.

Metody. Warto pochylić się nad stosowanymi metodami przy badaniu KBSM i KBSA. Przede wszystkim stosowane są metody teorii reprezentacji, badanie śladu, badanie elementów centralnych, redukcję parametru q do pierwiastka z jedynki [FKB18], oraz [BW11, BW16, BW17]. Początkowe prace to choćby [BFKB99].

Wyznaczanie KBSM wykonuje się przez wyznaczenie KBSM dla podstawowych obiektów, typu $\Sigma \times [0, 1]$ oraz badanie zachowania przy elementarnych działaniach na 3-rozmaitościach, jak suma spójna, chirurgia [GM19], suma brzegowa. Ta ostatnia metoda doprowadziła do rozwiązania hipotezy Wittena [GJS23], jakkolwiek praca wykorzystuje istotnie algebrę homologiczną i teorię kategorii.

Przy badaniu modułów skłębionej lazanii, konieczne jest zastosowanie zaawansowanej teorii kategorii (gdyż (3+1)-wymiarowa TQFT często formułowana jest w języku 2-kategorii), a także uzyskanie funktorialności danej klasy homologii dla węzłów, zwłaszcza przy niezwykle intuicyjnym ale bardzo trudnym do sformalizowania ruchu skakanki (swipe around move) [MWW22]. Metody mają wysoki próg wejścia, zwłaszcza wymagają bardzo dobrego zrozumienia funktorialności stosowanych homologii.

Kolejny problem z rozprawą habilitacyjną jest taki, że metody rozwijane przez Mroczkowskiego nie znajdują żadnego zastosowania w głównym nurcie teorii modułów kłębkowych.

M.B

Omówienie prac [H1]–[H6]. Podczas omawiania prac z habilitacji stosuje się numerację z autoreferatu. Prace [H1]–[H6] omawia się oddzielnie, gdyż stanowią one pewną całość. Prace [H7]–[H10] wiążą się metodologicznie z poprzednimi, ale dotyczą nieco innej problematyki.

Jedną z najbardziej cytowanych prac Mroczkowskiego jest wspólna praca z Dąbkowskim [H1], w której obliczony jest KBSM dla $D_2 \times S^1$, gdzie D_2 jest dyskiem z dwoma dziurami (parą spodni). Metodyka pracy jest taka, że autor wprowadza pewną klasę diagramów reprezentujących sploty w $D_2 \times S^1$ (rozdział 2). Za pomocą dodatkowych ruchów Reidemeistera, które zmieniają węzeł, ale nie zmieniają lokalnie nawiasu Kaufmanna, redukuje splot do pewnego splotu z danej klasy. Metoda ta nie jest nowa, podobne idee są stosowane przy badaniu niezmiennika Arf, a także przy tzw. 3-ruchach, 4-ruchach, czy t_{2k}-ruchach, zob. [DP02].

Kolejną pracą w cyklu jest [H2], gdzie KBSM jest wyznaczony dla rozmaitości $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$. Autor pisze, że jest to pierwszy przypadek obliczenia dla rozmaitości rozkładalnej, ale trudno wyjaśnić dlaczego rozkładalność odgrywa szczególną rolę. Metodyka jest bardzo zbliżona do poprzedniej, autor dowodzi niezmienniczości nawiasu Kauffmana przy dodatkowych ruchach.

Artykuły [H3], [H4] i [H6] dotyczą wyznaczenia KBSM dla rozmaitości pryzmowych i soczewkowych, przy czym [H6] liczy jeszcze inny typ modułu kłębkowego. Wszystkie 3 prace opierają się o ten sam schemat: wprowadzamy klasę diagramów, następnie dodatkowe ruchy typu Reidemeistera, które redukują splot do konkretnego przypadku.

Obliczenia w [H4] wykorzystują rozkład Heegaarda dla $L(p,1)$ oraz obliczenia KBSM dla pełnego torusa. Autor zaczyna krok w dobrym kierunku (rozkład Heegaarda był wykorzystywany przy dowodzie hipotezy Wittena [GJS23]), ale natychmiast przechodzi do swoich metod, czyli wprowadzenia kombinatorycznych ruchów Reidemeistera, co prowadzi do obliczenia $L(p,1)$, ale w żadnym wypadku do stworzenia większego obrazu. Warto nadmienić, że autor również badał o wiele trudniejszy moduł kłębkowy HOMFLY-PT.

W pewnym sensie, przy konstrukcji diagramów splotów w różnych rozmaitościach, autor wykorzystuje pewne idee z rachunku Kirby'ego (dla rozmaitości 3-wymiarowych), ale nie próbuje ich formalizować. Przy przedstawieniu rozmaitości 3-wymiarowej za pomocą chirurgii na splocie L_0 w S^3 można narysować diagram tego splotu w $\mathbb{R}^2$ i badać „ruchy Reidemeistera" dla splotów L w $\mathbb{R}^2$ w ich relacji do wyjściowego splotu L_0. Takie podejście jest powszechnie stosowane w teorii węzłów przy badaniu splotów w innych rozmaitościach niż S^3.

Praca [H5] ma charakter przeglądowy i opisuje podejście diagramatyczne do splotów w rozmaitościach z rozwłóknieniem Seiferta.

Wkład prac [H1]–[H6] w rozwój dyscypliny. Niestety, należy stwierdzić że ten wkład jest mocno ograniczony.

W pierwszej kolejności praca [Det21] cytuje [H1]. Mianowicie pokazuje, w Proposition 3.6, że wyniki z [H1] mogą być zastosowane do udowodnienia uogólnionej hipotezy Wittena dla $D_2 \times S^1$, ale wymaga to dodatkowych kroków i metod różnych od tych, którymi posługuje się Mroczkowski. Praca [H1] jest zdezaktualizowana przez [GM19], którzy wykorzystują chirurgię do badania KBSM dla $\Sigma_g \times S^1$. Użyte słowo „zdezaktualizowana" zamiast pozytywnego „uogólniona przez" znacznie lepiej oddaje kontekst. [GM19] wymieniają pracę [H1] we wstępie, obok kilku innych prac, natomiast ich metody są daleko

M.B

różne. O tym, że [GM19] uogólnia [H1] można by mówić gdyby ta praca w jakimś stopniu bazowała na [H1], tak jednak nie jest.

Jeśli chodzi o obliczenia KBSM, warto może przytoczyć fragment z jednej z przełomowych prac w dziedzinie, [GJS23], ze wzorowo napisanym wstępem:

Prior to Witten's conjecture, skein modules of closed 3-manifolds had been computed only for certain free quotients of S^3 *by finite groups [46, 56], surgeries on trefoil knots [23, 55] and a certain family of torus links [53] (see the introduction of [50] for more details). Subsequently, Carrega [27] and Gilmer [47] showed the skein module of the three-torus* $S^1 \times S^1 \times S^1$ *to be 9-dimensional; Gilmer and Masbaum [50] have established lower bounds for dimensions* $\Sigma_g \times S^1$ *of for any genus, and Detcherry [35] has established the conjecture for surgeries along two-bridge and torus knots.*

Zacytowany fragment wstępu do [GJS23] mówi o dotychczasowych obliczeniach KBSM. Spośród dziewięciu prac do których odnosi się zacytowany akapit, nie ma ani jednej pracy autorstwa Mroczkowskiego. A przecież, jak wspomniano, to właśnie prace [H1]–[H6] koncentrują się wokół obliczania KBSM.

Zresztą, znaczna część prac, które cytują [H1]–[H6] ogranicza to do zacytowania wyniku, a nie do przenoszenia metod. Nie dotyczy to cytowań własnych, dokonanych przez współautorów. Warto też zwrócić uwagę, że czołowi naukowcy w dziedzinie, Bonahon, Wong, Kania–Bartoszyńska, Frohman, w ogóle nie cytują Mroczkowskiego.

Warto też odnieść się chwilę do stylu pracy przeglądowej [H5]. W tego typu pracach naturalne jest, że autor szkicuje istotę problemu, pokazuje problem w ogólniejszym kontekście, zaznacza główne artykuły w literaturze. Tymczasem [H5] tak nie robi, nie wyjaśnia powodu do studiowania diagramów splotów w rozmaitościach Seiferta, nie cytuje też głównych prac. Prawie 30% prac w spisie literatury [H5] to autocytowania. Pozostałe prace w większości nie dotykają istotnej części dziedziny. Chociażby brakuje pracy [BW16], która się pojawiła na arxiv co najmniej 3 lata wcześniej, zanim została napisana praca [H5]. [H5] nie wspomina również ani o kwantyzacji, ani o reprezentacjach grupy $SL(2,\mathbb{C})$.

W autoreferacie autor pisze, że Detcherry i Wolff postawili hipotezę o strukturze KBSM [DW21], a później, w pracy [BP22] zostało zauważone, że praca [H2] daje kontrprzykład. Praca [DW21] jest jedną z nielicznych prac, które cytują prace Mroczkowskiego w sposób nieprzyczynkowy, opierając się na jego ideach (na diagramach strzałkowych), natomiast praca [BP22] wbrew temu, co pisze autor autoreferatu, cytuje [H2] wyłącznie w sposób przyczynkowy. Poza tym, [BP22] wskazuje, że hipoteza [DW21] jest obalona przez R. Bakshi. Stosowny fragment [BP22] brzmi:

Julien Marché had proposed a conjecture (see [2]) about the structure of the KBSM over which was recently disproved by the first author in [1].

Tutaj [2] odnosi się do [DW21], zaś [1] do krótkiej notatki R. Bakshi [Bak22], która dopiero cytuje [H2].

Kolejna sprawa poruszana w tym rozdziale to związki KBSM z reprezentacjami $SL(2,\mathbb{C})$ poruszonymi w autoreferacie. Autor cytuje dwie prace Bullocka o $SL(2,\mathbb{C})$ reprezentacjach w autoreferacie [Bul95, Bul97a]. Ale nie cytuje ich w żadnej ze swoich opublikowanych prac (jedynie [H1] wspomina o innej pracy Bullocka [Bul97b] w kontekście obliczeń). Ponadto nawet w autoreferacie nie wspomina o dalece ważniejszej pracy [Bul97c]. Wskazuje to, że autor nie ma przed oczami zastosowań swoich metod w teorii reprezentacji, a jedynie wspomina o nich na potrzeby autoreferatu.

M.B.

Autor studiował również inne moduły kłębkowe niż KBSM, niemniej tutaj zastosowań jest znacznie mniej, zainteresowania tymi obliczeniami ograniczają się niemal wyłącznie do kręgu studentów Sofii Lambropoulou, jakkolwiek podejście przez warkocze do tematyki daje nadzieję na znalezienie dobrych algorytmów (nie jest to podejście rozwijane przez autora). Ciekawa jest historia obliczenia modułu kłębkowego HOMFLY-PT dla $L(p,1)$. Otóż w pracach [H4] i [H6] autor policzył ten moduł dla $L(p,1)$ metodami badania diagramów. Kilka lat później ukazała się bazująca na [DL16] praca Diamantisa, Lambropoulou i Przytyckiego [DLP16] o tytule „Topological steps toward the Homflypt skein module of the lens spaces $L(p,1)$ via braids." Autorzy przyznają, że ten moduł został policzony (w [H4]), ale proponuje inną metodę, argumentując to następująco:

The advantage of the braid approach is that it gives more control over the band moves than the diagrammatic approach and much of the diagrammatic complexity is absorbed into the proofs of the algebraic statements.

Rzadko się zdarza, aby wynik całkowity (wyznaczenie modułu) został wyparty przez wyniki częściowe (kroki w kierunku wyznacznia modułu) [DLP16, DL17, Dia21] z pracami zatytułowanymi jak [DL17] np. „An important step for the computation of the HOMFLYPT skein module of the lens spaces L(p,1) via braids". Istotna przewaga podejścia przez warkocze, jako takiego które daje głębsze zrozumienie a nie tylko sam wynik, jest oczywista. Uwe Kaiser, w przeglądzie dla MathSciNet pracy [DL17] pisze:[2]

This article further develops the algebraic approach in the computation of skein modules based on braids for the HOMFLYPT skein modules of lens spaces L(p,1), which has been initiated in [I. Diamantis, S. S. F. Lambropoulou and J. H. Przytycki, J. Knot Theory Ramifications 25 (2016), no. 14, 1650084; MR3582885] and [I. Diamantis and S. S. F. Lambropoulou, J. Pure Appl. Algebra 220 (2016), no. 2, 577–605; MR3399379]. It is known that the module is a quotient of the HOMFLYPT skein module of the solid torus by relations described by braid band moves. The main point is to describe explicitly the effect of the braid band moves in terms of a suitable basis. The authors point out that the approach via braid moves can shed light on the problem of computing skein modules of arbitrary closed connected oriented 3-manifolds. The HOMFLYPT skein modules of L(p,1) have previously been computed by B. Gabrovšek and M. Mroczkowski [Topology Appl. 175 (2014), 72–80; MR3239212].

Inaczej mówiąc, przy obliczaniu modułu HOMFLY-PT można pokusić się o stwierdzenie, że metody diagramowe Mroczkowskiego zostały wprawdzie zauważone przez środowisko, ale uznane za dalece niewystarczające.

Opis prac [H7]–[H10]. Prace [H7]–[H10] opisują diagramy splotów z perspektywy rozwłóknienia Hopfa. Dla przypomnienia. Splot L zazwyczaj rozpatruje się w S^3. Po usunięciu punktu w nieskończoności, uzyskujemy $\mathbb{R}^3$, które po zrzutowaniu (odpowiednio generycznym) na $\mathbb{R}^2$ zadaje diagram.

Innym sposobem badania splotów, zaproponowanym przez Fiedlera [Fie91] jest badanie diagramu otrzymanego przez przejście z S^3 do S^2 za pomocą rozwłóknienia Hopfa a następnie usunięcie punktu w nieskończoności z S^2. Diagram, który otrzymujemy, nazywamy diagramem Hopfa.

---

[2] `https://mathscinet.ams.org/mathscinet/article?mr=4038332`, odczytany 4 marca 2024.

M. Z.

Motywacją jest badanie splotów algebraicznych, które z natury swojej dobrze zachowują się przy rozwłóknieniu Hopfa. Idea Fiedlera wydawała się obiecująca, ale żadne wyniki nie zostały osiągnięte w tej dziedzinie przez ponad 20 lat. Według MathSciNet, [Fie91] był cytowany 3 razy od 1991 roku, wszystkie 3 cytowania autorstwa Mroczkowskiego. [3]

Praca [H7] wykorzystuje błyszczyki (ang. gleams) wprowadzone przez Turaeva do badania diagramów Hopfa. Pewne wyniki są osiągnięte, jak klasyfikacja splotów spełniających $h(K) = 1$. Jakkolwiek klasyfikacja jest dość ciekawa, dowód jest elementarny (rozróżnia sploty w klasyfikacji przez wielomian Jonesa). Brakuje zastosowań tego wyniku.

Praca [H8] wprowadza pewne ruchy na diagramie Hopfa, tzw. k-ruchy i bada zachowanie wielomianu Jonesa przy tych ruchach. To podejście naśladuje klasyczne studia nad różnymi ruchami dla klasycznych splotów, typu t_k-ruchy [Prz88], ale zastosowania k-ruchów są nieokreślone. Dla przykładu, ruchy t_k mogą posłużyć do badania torsji w homologiach Khovanova [MPS$^+$18], mogą uzasadniać odległość między 4-genusem i liczbą gordyjską, mogą służyć do klasyfikacji splotów Montesinosa [Sto07]. Nie wspominając o związkach t_k ruchów ze splotami wymiernymi. Niestety, [H8] wprowadzając k-ruchy nie podaje jakiejkolwiek motywacji.

W pracy [H9] autor obala hipotezę Fiedlera [Fie91] pokazując, że różnica $C_{alg}(K) - h(K)$ może być dowolnie duża, jeśli K jest węzłem algebraicznym. Podejście jest następujące: Fiedler udowodnił, że $C_{alg}(K)$ jest ograniczone od dołu przez wyrażenie zależące od par Puiseux dla osobliwości. Metody z [H7] ograniczają od góry wyrażenie $h(K)$. Pewną nowością w pracach Mroczkowskiego jest nauczenie się podstaw rozwinięć Puiseux, ale to jest silnie związane z iterowanymi kablami.

Rozwiązanie (potwierdzenie bądź obalenie) 30-letniej hipotezy mogłoby być uznane za duże osiągnięcie, gdyby nie wspomniany wyżej fakt, że pracy Fiedlera nikt poza Mroczkowskim nie cytował. Fakt, że pracy [H9] nikt nie cytuje, można jeszcze zrozumieć, bo praca była opublikowana niecałe 2 lata temu (jakkolwiek prace rozwiązujące duże hipotezy potrafią mieć i po kilkadziesiąt cytowań po roku). Ponadto, [H9] nie pokazuje żadnych dalszych konsekwencji tej hipotezy, w tym szerszego kontekstu. Widać to choćby po odnośnikach w pracy: Mroczkowski cytuje Fiedlera, trzy swoje prace i klasyczną pozycję Le Dung Tranga z 1972 roku. To wskazuje na to, że autor nie umieszcza tej hipotezy w jakimkolwiek kontekście.

Potencjalnym zastosowaniem prac [H7], [H8], [H9] mogłoby być badanie pierwiastków wielomianu Jonesa. Takie badania przeprowadzani Champanerkar i Kofman, [CK05, CK06]. W ich pracach widać związek pierwiastków wielomianu Jonesa i miary Mahlera z hipotezą objętościową (volume conjecture), zob. też [CKL19]. Autor wykorzystuje te metody do konstrukcji pewnych rodzin splotów z zadanymi własnościami pierwiastków wielomianu Jonesa. Należy na duży plus wskazać, że praca [H10] jest znacznie dojrzalsza od poprzednich. Autor cytuje znacznie więcej prac, umieszcza wynik szerszym kontekście (choć nie aż takim, jak [CK05, CK06]). Niestety, w dalszym ciągu stosowany jest iterowany trick diagramów strzałkowych. Można zacytować początek rozdziału 3 pracy [H10], opisujących wstęp do diagramów strzałkowych:

[3]MathSciNet nie podaje cytowań przez książki. Google Scholar pozwala doszukać się, że praca Fiedlera była wspomniana w książce Turaeva w notatkach na końcu rozdziału 8, a także w bibliografii w książce Burde-Zieschang.

M. B

Arrow diagrams were introduced in [12] for links in $F \times S^1$, where F is an orientable surface. They were subsequently extended for links in Seifert manifolds (see [7, 13, 14]). In [15], they were applied to links in S^3...

I tutaj uważny czytelnik zauważy, że wszystkie cytowane prace są autorstwa Mroczkowskiego. Inaczej mówiąc, autor w pewnym sensie przyznaje, że poza nim, diagramy strzałkowe pozostają niezauważone.

Inne prace. Poza pracami złożonymi przed doktoratem, Mroczkowski wymienia [AD1] i [AD2]. Praca [AD2] zasługuje na pewną uwagę. Klasyfikacja węzłów w pełnym torusie jest dużą przysługą dla społeczności naukowej. Niemniej, nie jest to rozwinięcie nowych metod. Na przykład, na autorów stron typu KnotInfo, na twórców programów typu SnapPy czy KnotJob patrzy się w dalszym ciągu przede wszystkim z perspektywy ich publikacji, a nie z perspektywy – wielokrotnie przecież docenianej – pracy na rzecz społeczności matematycznej polegającej na rozwijaniu takich narzędzi.

Ocena innej aktywności. Przede wszystkim ocenie podlega działalność naukowa. Mroczkowski pokazał pewien poziom współpracy międzynarodowej (UC Dallas, Ljubljana, Ateny), był również aktywny na polu popularyzatorskim. Organizacja *Knots in Gdańsk* również nie może pozostać niedoceniona. Niemniej, ocenie podlega przede wszystkim jednorodny cykl wykładów.

Bibliometria. Pewnym zwyczajem w recenzjach rozpraw habilitacyjnych stało się ocenianie habilitanta na podstawie danych bibliometrycznych, na przykład liczby publikacji i liczby cytowań. Oczekiwanie jest takie, że matematyk mający 12–15 publikacji na habilitację zasługuje. W przypadku dr. Mroczkowskiego mamy 14 prac i 94 cytowania na MathSciNet, co jest wynikiem wypełniającym to oczekiwanie; liczba 94 wygląda dość dobrze. Niemniej, należy zwrócić uwagę, że jest to nawet nie zasada, tylko oczekiwanie. Znane są przypadki odrzucenia habilitacji kandydata mającego dobrze ponad 100 cytowań, w tym ponad 60 cytowań z jednej pracy w cyklu, oraz mającego „lepsze" (w sensie: wyżej punktowane przez ministerstwo) publikacje. Ponadto, gdyby bibliometria miała decydować o tym czy wyniki są zauważane, zbędne byłyby recenzje.

Ocenie podlega wpływ na dziedzinę czy poprzez uzyskiwanie ważnych wyników, czy poprzez rozwijanie metod, a nie liczbowe uzyskanie takiego czy innego progu.

Ocena końcowa. Autor powinien zdecydowanie rozszerzyć zakres stosowanych technik a nie ograniczać się wyłącznie do badania operacji na diagramach. Nawet kombinatoryczne podejście do teorii węzłów w stylu Kauffmana, Lambropoulou, Gügümçü, zawiera cały wachlarz technik. Nowatorska dziedzina modułów skłębionej lazanii daje szanse na znalezienie niskozawieszonych owoców (low-hanging fruits), czyli ważnych wyników uzyskiwanych stosunkowo niskim kosztem. Jednym z bardzo obiecujących kierunków rozwoju jest kategoryfikacja modułów kłębkowych i związki z bimodułami Soergela, jak w pracy [HRW21].

Na ostateczną ocenę mają wpływ następujące czynniki.

- Jak opisano wyżej, prace [H1]–[H10] opierają się na jednej metodzie, mianowicie na analizie zachowania niezmienników przy dodatkowych ruchach Reidemeistera na diagramach strzałkowych.

M.B

- Jak uzasadniono, metody te są wykorzystywane niemal wyłącznie w pracach Mroczkowskiego, a na pewno nie są stosowane w pracach głównego nurtu teorii modułów kłębkowych.
- Prace [H1]–[H10] pozostają ledwie zauważone przez główny nurt badań nad KBSM. Jak opisano wyżej, cytowania [H1]–[H10] przez prace w głównym nurcie są w większości wzmiankami.
- Prace [H1]–[H10] również nie odnoszą się do głównych prac w dziedzinie.

Konkluzja. Wobec powyższego trudno obronić tezę, że przedstawiony cykl prac stanowi znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny [4]. Dlatego uważam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna **nie** spełnia ustawowych i zwyczajowych wymagań stawianych rozprawom habilitacyjnym.

Literatura

[Bak22] Rhea Palak Bakshi, *A counterexample to the generalisation of witten's conjecture*, 2022.

[BFKB99] Doug Bullock, Charles Frohman, and Joanna Kania-Bartoszyńska, *Understanding the Kauffman bracket skein module*, J. Knot Theory Ramifications **8** (1999), no. 3, 265–277.

[BP22] Rhea Palak Bakshi and Józef H. Przytycki, *Kauffman bracket skein module of the connected sum of handlebodies: a counterexample*, Manuscripta Math. **167** (2022), no. 3-4, 809–820.

[Bul95] Doug Bullock, *The $(2,\infty)$-skein module of the complement of a $(2,2p+1)$ torus knot*, J. Knot Theory Ramifications 4 (1995), no. 4, 619–632.

[Bul97a] ______, *Estimating a skein module with* $SL_2(\mathbf{C})$ *characters*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 6, 1835–1839.

[Bul97b] ______, *On the Kauffman bracket skein module of surgery on a trefoil*, Pacific J. Math. **178** (1997), no. 1, 37–51.

[Bul97c] ______, *Rings of* $SL_2(\mathbf{C})$*-characters and the Kauffman bracket skein module*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), no. 4, 521–542.

[BW11] Francis Bonahon and Helen Wong, *Quantum traces for representations of surface groups in* $SL_2(\mathbb{C})$, Geom. Topol. **15** (2011), no. 3, 1569–1615.

[BW16] ______, *Representations of the Kauffman bracket skein algebra I: invariants and miraculous cancellations*, Invent. Math. **204** (2016), no. 1, 195–243.

[BW17] ______, *Representations of the Kauffman bracket skein algebra II: Punctured surfaces*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), no. 6, 3399–3434.

[BWY21] Francis Bonahon, Helen Wong, and Tian Yang, *Asymptotics of quantum invariants of surface diffeomorphisms i: conjecture and algebraic computations*, 2021.

[Che22] Daren Chen, *Floer lasagna modules from link floer homology*, 2022.

[CK05] Abhijit Champanerkar and Ilya Kofman, *On the Mahler measure of Jones polynomials under twisting*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 1–22.

[CK06] ______, *On links with cyclotomic Jones polynomials*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1655–1668.

[CKL19] Abhijit Champanerkar, Ilya Kofman, and Matilde Lalín, *Mahler measure and the vol-det conjecture*, J. Lond. Math. Soc. (2) **99** (2019), no. 3, 872–900.

[CL22] Francesco Costantino and Thang T. Q. Lê, *Stated skein algebras of surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **24** (2022), no. 12, 4063–4142.

[Det21] Renaud Detcherry, *Infinite families of hyperbolic 3-manifolds with finite-dimensional skein modules*, J. Lond. Math. Soc. (2) **103** (2021), no. 4, 1363–1376.

[Dia21] Ioannis Diamantis, *HOMFLYPT skein sub-modules of the lens spaces $L(p,1)$*, Topology Appl. **301** (2021), Paper No. 107500, 25.

[DL16] Ioannis Diamantis and Sofia Lambropoulou, *A new basis for the Homflypt skein module of the solid torus*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), no. 2, 577–605.

[4] por. Dz. U. 478 z 2001, z późn. zm., art 219 ust 1 pkt 2

M.B.

[DL17] ———, *The braid approach to the HOMFLYPT skein module of the lens spaces $L(p,1)$*, Algebraic modeling of topological and computational structures and applications, Springer Proc. Math. Stat., vol. 219, Springer, Cham, 2017, pp. 143–176.

[DLP16] Ioannis Diamantis, Sofia Lambropoulou, and Jozef H. Przytycki, *Topological steps toward the Homflypt skein module of the lens spaces $L(p,1)$ via braids*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 14, 1650084, 26.

[DP02] Mieczysław K. Dąbkowski and Józef H. Przytycki, *Burnside obstructions to the Montesinos-Nakanishi 3-move conjecture*, Geom. Topol. **6** (2002), 355–360.

[DW21] Renaud Detcherry and Maxime Wolff, *A basis for the Kauffman skein module of the product of a surface and a circle*, Algebr. Geom. Topol. **21** (2021), no. 6, 2959–2993.

[Fie91] Thomas Fiedler, *Algebraic links and the Hopf fibration*, Topology **30** (1991), no. 2, 259–265.

[FKB18] Charles Frohman and Joanna Kania-Bartoszynska, *The structure of the Kauffman bracket skein algebra at roots of unity*, Math. Z. **289** (2018), no. 3-4, 889–920.

[FKBL19] Charles Frohman, Joanna Kania-Bartoszynska, and Thang Lê, *Unicity for representations of the Kauffman bracket skein algebra*, Invent. Math. **215** (2019), no. 2, 609–650.

[GJS23] Sam Gunningham, David Jordan, and Pavel Safronov, *The finiteness conjecture for skein modules*, Invent. Math. **232** (2023), no. 1, 301–363.

[GM19] Patrick M. Gilmer and Gregor Masbaum, *On the skein module of the product of a surface and a circle*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 9, 4091–4106.

[HRW21] Matthew Hogancamp, David E. V. Rose, and Paul Wedrich, *A skein relation for singular soergel bimodules*, 2021.

[MN22] Ciprian Manolescu and Ikshu Neithalath, *Skein lasagna modules for 2-handlebodies*, 2022.

[MPS$^+$18] Sujoy Mukherjee, Józef H. Przytycki, Marithania Silvero, Xiao Wang, and Seung Yeop Yang, *Search for torsion in Khovanov homology*, Exp. Math. **27** (2018), no. 4, 488–497.

[MWW22] Scott Morrison, Kevin Walker, and Paul Wedrich, *Invariants of 4-manifolds from Khovanov-Rozansky link homology*, Geom. Topol. **26** (2022), no. 8, 3367–3420.

[MWW23] Ciprian Manolescu, Kevin Walker, and Paul Wedrich, *Skein lasagna modules and handle decompositions*, Adv. Math. **425** (2023), Paper No. 109071, 40.

[Prz88] Józef H. Przytycki, *t_k moves on links*, Braids (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., vol. 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 615–656.

[Prz91] ———, *Skein modules of* 3*-manifolds*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **39** (1991), no. 1-2, 91–100.

[PS00] Józef H. Przytycki and Adam S. Sikora, *On skein algebras and* $\mathrm{Sl}_2(\mathbf{C})$*-character varieties*, Topology **39** (2000), no. 1, 115–148.

[QW21] Hoel Queffelec and Paul Wedrich, *Khovanov homology and categorification of skein modules*, Quantum Topol. **12** (2021), no. 1, 129–209.

[RW24] Qiuyu Ren and Michael Willis, *Khovanov homology and exotic* 4*-manifolds*, 2024.

[Sto07] Alexander Stoimenow, *5-moves and Montesinos links*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), no. 3, 729–749.

[Tur91] Vladimir G. Turaev, *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **24** (1991), no. 6, 635–704.

Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, ul Śniadeckich, Warsaw, Poland
Email address: `mcboro@mimuw.edu.pl`