

AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: **Maciej Mroczkowski**

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

- Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany w 2004 roku na Uniwersytecie w Uppsali. Tytuł rozprawy: Projective Links and Their Invariants.
- Tytuł inżyniera uzyskany w 2000 roku (promocja rok 1999) w Państwowej Wyższej Szkole Telekomunikacji w Bretanii (ENST Bretagne)

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych: Stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, zatrudniony od października 2004

4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.):

Jednotematyczny cykl 10 publikacji pod tytułem:

Diagramy strzałkowe z zastosowaniami do skein modułów i klasycznych węzłów

składający się z następujących prac:

[H1] M. Mroczkowski, M. Dąbkowski, *KBSM of the product of a disk with two holes and S^1* , Topology and its Applications **156** (2009), 1831–1849.

[H2] M. Mroczkowski, *KBSM of the connected sum of two projective spaces*, J. Knot Theory and its Ramifications **20** (2011), no. 5. 651–675.

[H3] M. Mroczkowski, *KBSM of a family of prism manifolds*, J. Knot Theory and its Ramifications **20** (2011), no. 1. 159–170.

[H4] B. Gabrovsek, M. Mroczkowski, *The HOMFLYPT skein module of the lens spaces*, Topology and its Applications **175** (2014), nr. 9, 72-80

[H5] B. Gabrovsek, M. Mroczkowski, *Link diagrams and applications to skein modules*, Algebraic Modeling of Topological and Computational Structures and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics book series **219** (2017).

[H6] M. Mroczkowski *The Dubrovnik and Kauffman skein modules of the lens spaces $L_{p,1}$* , J. Knot Theory Ramifications **27** (2018), no. 3, 1840004.

[H7] M. Mroczkowski, *Knots with Hopf crossing number at most one*, Osaka J. Math. **57** (2020), no. 2, 279–304.

[H8] M. Mroczkowski, *On some moves on links and the Hopf crossing number*, Mediterr. J. Math. **18**, 7 (2021).

[H9] M. Mroczkowski, *On two crossing numbers of algebraic knots under Hopf fibration*, Topology and its Applications, **312** (2022), 108084.

[H10] M. Mroczkowski, *Infinitely many roots of unity are zeros of some Jones polynomials*, Geom. Dedicata **216** (2022), no. 4, Paper No. 43.

W poniższym referacie prace [H1]-[H10] odnoszą się do powyższego cyklu, prace [AD1], [AD2], [PD1], [PD2] do moich pozostałych prac (strona 7 niniejszego auto-referatu), natomiast pozostałe odnośniki dotyczą prac innych autorów (na końcu autoreferatu).

4.1 WSTĘP

Klasyczna teoria węzłów bardzo często posługuje się pojęciem *diagramów*, czyli rzutów węzłów (lub splotów) z \mathbb{R}^3 na \mathbb{R}^2 . Na otrzymanych *cieniach*, czyli zanurzonych krzywych, dodana jest informacja tunel-most dla każdego skrzyżowania. Izotopie ambientalne splotów odpowiadają seriom *ruchów Reidemeistera* na diagramach [Rei27]. Istnieją trzy typy takich ruchów. Diagramy splotów wraz z ruchami Reidemeistera stanowią bardzo przydatne narzędzie do tworzenia i badania *niezmienników* splotów: dana funkcja z diagramów do dowolnych obiektów (zbiorów liczb, wielomianów...) będzie niezmiennikiem, jeżeli nie zmienia się jej wartość przy ruchach Reidemeistera. Rozkwit tego typu niezmienników przypada na lata osiemdziesiąte ubiegłego wieku i później, a zaczyna się od wielomianu Jonesa [Jon85].

Uogólnienia niezmienników odkrytych po wielomianie Jonesa ze splotów w \mathbb{R}^3 (lub S^3) na sploty w innych rozmaitościach zostały zapoczątkowane przez wprowadzenie *skein modułów* [Prz91, Tur88]. Obliczenia różnych typów skein modułów okazały się trudne w ogólności. Najpopularniejszy z nich, skein moduł nawiasu Kauffmana, jest do dziś wyliczony dla zaledwie kilku rodzin 3-rozmaitości (np. nie jest obliczony dla wszystkich przestrzeni Seiferta). Inne skein moduły nie są obliczone nawet dla najprostszycy rodzin takich jak przestrzenie soczewkowe. Dzięki wprowadzeniu diagramów strzałkowych w [H1], niektóre z tych problemów zostały częściowo rozwiązane.

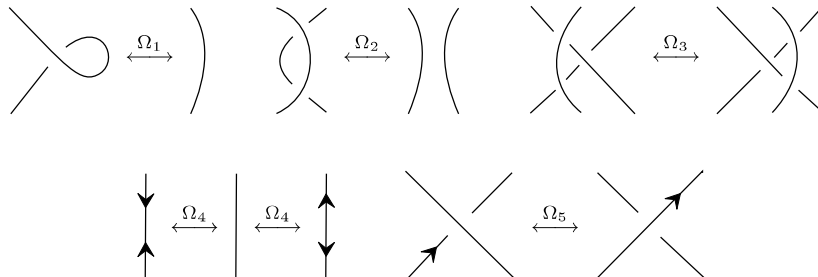
W ostatnich latach istnieje duże zainteresowanie skein modułami. Warto wspomnieć choćby prace [BW16], [FKBL19] dotyczące skein algebr nawiasu Kauffmana, czy [GJS23], gdzie została rozwiązana hipoteza Wittena dotycząca skończoności wymiaru skein modułów nawiasu Kauffmana dla domkniętych 3-rozmaitości (ze współczynnikami w $\mathbb{Q}(A)$).

Dla splotów w S^3 istnieje możliwość rzutowania na S^2 stosując rozwłóknięcie Hopfa. Daje to naturalnie diagramy strzałkowe klasycznych splotów z sześcioma ruchami Reidemeistera. Takie alternatywne rzutowania klasycznych splotów były rozważane w [Fie91] oraz [Tur92]. Poza kilkoma pracami z końca ubiegłego wieku, te rzutowania nie były badane aż do prac [H7]-[H10], gdzie nowe niezmienniki, ruchy na splotach oraz przykłady węzłów z ciekawymi wielomianami Jonesa zostały odkryte. Dodatkowo został rozwiązany pewien problem z [Fie91].

4.2 DIAGRAMY STRZAŁKOWE

Diagramy strzałkowe zostały wprowadzone w [H1]. W tej pracy za pomocą diagramów strzałkowych reprezentowane są sploty w rozmaitości $F \times S^1$, gdzie F jest powierzchnią orientowalną (z brzegiem lub bez). Są one blisko związane z tzw. *gleams* wprowadzonymi przez Turaeva w [Tur92]. Diagramy strzałkowe są generycznie zanurzonymi krzywymi na powierzchni F , z informacją most-tunel na skrzyżowaniach oraz dodatkowymi strzałkami na krzywych poza skrzyżowaniami. Oprócz strzałek, wyglądają jak klasyczne diagramy dla $F \times I$, gdzie $I = [0, 1]$. Diagramy są otrzymane przez rozcięcie $F \times S^1$ - w otrzymanym $F \times I$ strzałki dają informację w których miejscach splot w $F \times S^1$ został rozcięty. Izotopie ambientalne splotów

odpowiadają ruchom Reidemeistera: trzem klasycznym oraz dwóm dodatkowym, przedstawionym na rys. 1. W ten sposób badanie splotów w $F \times S^1$ sprowadza się do badania diagramów strzałkowych oraz pięciu ruchów Reidemeistera.



RYSUNEK 1. ruchy Reidemeistera

Diagramy strzałkowe zostały rozszerzone dla splotów w skręconych wiązках S^1 nad powierzchniami nieorientowanymi i, jeszcze ogólniej, dla splotów w przestrzeniach Seiferta w [H2] i [H3] (z podsumowaniem w [H5]). Za każdym razem do podstawowych pięciu dodane są odpowiednie ruchy Reidemeistera. Diagramy strzałkowe stanowią użyteczne narzędzie do badań nad splotami w tych różnych rozmaitościach. Zostały one głównie wykorzystane do obliczenia skein modułów niektórych rozmaitości (rozdział 4.3), oraz do badania klasycznych węzłów, czyli węzłów w S^3 (rozdział 4.4).

4.3 SKEIN MODUŁY

Skein moduły zostały wprowadzone przez J. Przytyckiego [Prz91] i V. Turaeva [Tur88]. Dzięki skein modułom uogólnia się w naturalny sposób niektóre niezmienniki splotów w S^3 na sploty w innych 3-rozmaitościach, najczęściej orientowalnych. Z jednej strony dany skein moduł konkretnej 3-rozmaitości M pozwala na badanie splotów w M ; z drugiej strony obliczenie skein modułów całych rodzin 3-rozmaitości może dać pewne informacje o tych 3-rozmaitościach. Istnieją różne skein moduły w zależności od wybranej skein relacji.

Najczęściej rozważane są skein moduły nawiasu Kauffmana (z angielskiego Kauffman Bracket Skein Module albo KBSM), [Prz99]. Inne ważne przypadki to skein moduły HOMFLYPT oraz skein moduły Kauffmana w których definicjach używa się relacji skein wielomianu HOMFLYPT [FYH⁺85, PT88] i, odpowiednio, wielomianu Kauffmana [Kau90].

Fundamentalne znaczenie KBSM-ów wiąże się z ich związkiem z reprezentacjami grup podstawowych 3-rozmaitości w $SL_2(\mathbb{C})$, odkryte przez D. Bullocka [Bul97a]. KBSM-y, zależne od wyboru współczynników takich jak $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$, $\mathbb{C}[A, A^{-1}]$ lub ewentualnie przy dopuszczeniu odwracalności niektórych elementów, zostały obliczone w nielicznych przypadkach takich jak: przestrzenie soczewkowe [HP93], $S^1 \times S^2$ [HP95], dopełnienia węzłów torusowych $(2, 2p+1)$ [Bul95], chirurgie na trójlistniku [Bul97b], przestrzeń kwaternionowa [GH07], $\mathbb{R}P^3 \sharp \mathbb{R}P^3$ [H2], nieskończona rodzina przestrzeni pryzmowych [H3], dopełnienia węzłów torusowych [Mar10] czy dopełnienia splotów 2-mostowych [LT14]. Dla ogólniejszych rodzin zostały określone zbiory generatorów dla KBSM, np. dla pewnej rodziny przestrzeni Seiferta w [AF22].

J. Przytycki badał zależność pomiędzy istnieniem nieścieśnialnych niebrzegowych powierzchni w 3-rozmaitości oraz torsją w skein module nawiasu Kauffmana tej 3-rozmaitości, wykazując taką zależność przy pewnych założeniach [Prz99]. Ciekawym przypadkiem jest tu rozmaitość $M = F \times S^1$, gdzie F jest dyskiem z dwoma dziurami. M zawiera odpowiedniego zanurzonego torusa, który jednak nie może być włożony. Przytycki był zainteresowany obecnością torsji w skein module nawiasu Kauffmana M . W pracy [H1] ten skein moduł jest obliczony: jest wolny z nieskończoną bazą. Podstawowym narzędziem są tu diagramy strzałkowe, wprowadzone w tej pracy. W kolejnych krokach są obliczone skein moduły nawiasu Kauffmana dla: pełnego torusa, pogrubionego torusa (przypadki już znane) i wreszcie dla M . Dzięki diagramom strzałkowym możliwa jest kontrola nad wszystkimi relacjami w skein module co pozwala znaleźć generatory i wykazać, że skein moduł jest wolny.

W pracach [H2] i [H3] diagramy strzałkowe zostały rozszerzone dla splotów w skręconych wiązках S^1 nad powierzchniami nieorientowanymi oraz, ogólniej, dla splotów w przestrzeniach Seiferta. W [H2] został obliczony KBSM dla skręconej wiązki S^1 nad płaszczyzną rzutową, homeomorficznej z $\mathbb{R}P^3 \sharp \mathbb{R}P^3$. Był to pierwszy przypadek całkowitego obliczenia KBSM sumy dwóch rozmaitości, jak i rozmaitości zawierającej rozdzielającą powierzchnię. Struktura tego skein modułu jest dosyć skomplikowana: zawiera on elementy torsyjne i nie daje się przedstawić jako suma cyklicznych modułów. W [H2] obliczone są ponownie KBSM-y dla przestrzeni soczewkowych $L_{p,1}$ oraz dla $S^2 \times S^1$. Szczególnie w tym drugim wypadku dowód jest dużo prostszy od dowodu w [HP95].

Dorzucając włókna, otrzymujemy z $\mathbb{R}P^3 \sharp \mathbb{R}P^3$ przestrzenie pryzmowe. W prostych przypadkach, gdy włókno jest typu $(p, 1)$, otrzymujemy przestrzenie pryzmowe z pierwszą homologią rzędu 4. Dla takich przestrzeni KBSM-y zostały obliczone w [H3]. W tym wypadku mają prostą strukturę: są wolne, skończenie generowane, a wymiar zależy w prosty sposób od p . Warto zauważyć, że ta nieskończona rodzina przestrzeni pryzmowych zawiera przestrzeń kwaternionową dla której KBSM został obliczony w [GH07].

Metoda diagramów strzałkowych została wykorzystana przez innych autorów. Carrega dowiódł w [Car17], że skein moduł nawiasu Kauffmana ze współczynnikami w $\mathbb{Q}(A)$ (czyli dopuszczając odwracalność dla dowolnych wielomianów od A) dla 3-torusa jest generowany przez 9 elementów. Wynik został uogólniony przez Detcherry i Wolff, w [DW21], dla iloczynu S^1 z dowolną orientowaną powierzchnią bez brzegu. W obu przypadkach diagramy strzałkowe są kluczowe w dowodach. Również Aranda i Ferguson skorzystali w [AF22] z diagramów strzałkowych aby znaleźć zbiory generatorów dla KBSM-ów pewnej rodziny przestrzeni Seiferta.

Dalsze obliczenia KBSM ze współczynnikami w $\mathbb{Q}(A)$, takie jak w [Det21], sugerowały prawdziwość tzw. hipotezy Wittena, która mówi, że KBSM ze współczynnikami w $\mathbb{Q}(A)$ dla domkniętej 3-rozmaitości M jest skończonego wymiaru (sformułowanie np. w [Det21]). Hipoteza została niedawno udowodniona w [GJS23]. Prawdziwość hipotezy otwiera widoki na nowe i bardzo ciekawe badania dotyczące 3-rozmaitości. W szczególności wyliczenia oraz interpretacja wymiaru dla konkretnych rozmaitości są jeszcze mało zbadane.

Również w [Det21] pojawiają się uogólnienia hipotezy Wittena dla rozmaitości z brzegiem (Conj. 3.2 i 3.3). W tej pracy rozmaitość M z [H1] stanowi ważny przykład wzmacniający hipotezę 3.3.

Hipoteza Wittena została uogólniona w innym kierunku, do przypadku KBSM rozmaitości domkniętej ze współczynnikami w $R = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ (Hipoteza Marche - hipoteza 1.1 w [DW21]). Uogólniona hipoteza mówi, że KBSM rozkłada się na R^d (d - liczba naturalna) oraz sumę (możliwe, że nieskończoną) modułów N_k , gdzie N_k jest $A^k - A^{-k}$ -torsyjnym modulem. W [BP22] zostało zauważone, że istnieje kontrprzykład dla tej uogólnionej hipotezy, mianowicie dla rozmaitości $M = \mathbb{R}P^3 \sharp \mathbb{R}P^3$, której KBSM został obliczony w [H2]. W pracy [H2] zostało udowodnione (Prop. 4.19), że KBSM rozmaitości M nie ma rozbicia na moduły wolne i cykliczne (np. takie jak N_k). Tym samym hipoteza Marche nie jest prawdziwa - struktura skein modułu może być bardziej skomplikowana.

Poza skein modułami nawiasu Kauffmana, innymi ważnymi skein modułami, tak jak wspomniano na początku tego rozdziału, są skein moduł HOMFLYPT oraz skein moduł Kauffmana. Wyliczenia tych skein modułów są trudniejsze niż w przypadku nawiasu Kauffmana: bardzo niewiele jest 3-rozmaitości dla których zostały one obliczone. Żaden z tych skein modułów nie został policzony dla wszystkich przestrzeni soczewkowych [DLP16, DL17, DL19]. Ważnym wynikiem w tym kierunku jest obliczenie w [H4] skein modułu HOMFLYPT dla przestrzeni soczewkowych $L_{p,1}$, $p > 1$. Te skein moduły są wolne. Nieskończone bazy są podane dla każdego z nich. W przypadku $L_{p,q}$, gdy $q > 1$, sytuacja komplikuje się drastycznie. Metody z [H4] mogą być wykorzystane jedynie do znalezienia zbioru generatorów dla $L_{p,2}$. Dla $q > 2$, te metody nie dają nawet zbioru generatorów.

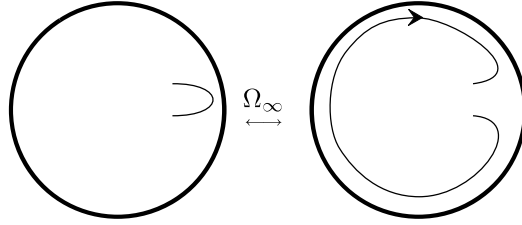
W [H6], rozszerzając metody z [H4], obliczone są skein moduły Kauffmana $L_{p,1}$, dla nieparzystych p . Z kolei dla p parzystych jest wykazane, że te skein moduły mają torsję. Istnieje też wariant wielomianu Kauffmana, tzw. wielomian Dubrovnika, który dla klasycznych splotów jest równoważny wielomianowi Kauffmana. Stosując skein relację Dubrovnika zamiast Kauffmana, w [H6] wyliczone są również skein moduły Dubrovnika dla wszystkich przestrzeni soczewkowych $L_{p,1}$, $p > 1$. Okazuje się, że w tym wypadku wszystkie moduły są wolne i nieskończenie generowane, podobnie jak w przypadku skein modułów HOMFLYPT z [H4].

Zarówno w [H4] jak i [H6], wyliczenie skein modułów opiera się całkowicie na diagramach strzałkowych i związanych z nimi ruchach Reidemeistera.

4.4 WĘZŁY I FIBRACJA HOPFA

Innym ważnym wykorzystaniem diagramów strzałkowych jest badanie węzłów czy splotów klasycznych (czyli w S^3). Tradycyjnie, sploty w \mathbb{R}^3 (co jest równoważne splotom w S^3) są badane za pomocą diagramów - są to rzutowania splotów z \mathbb{R}^3 na \mathbb{R}^2 , z zachowaniem informacji most-tunel na skrzyżowaniach. Inną możliwością jest rozważanie rozwłóknienia Hopfa $p : S^3 \rightarrow S^2$ i rzutowania splotów wzdłuż włókien S^1 na sferę S^2 . Rozcinając włókna otrzymujemy naturalnie diagramy strzałkowe w dysku z dodatkowym ruchem Reidemeistera, rys. 2. Dokładnie zostało to opisane w [H7]. Badając własności diagramów strzałkowych węzłów, na przykład minimalnej ilości skrzyżowań, otrzymujemy nowe niezmienniki klasycznych węzłów (i splotów).

Pierwszy raz pomysł badania węzłów za pomocą rzutowania Hopfa pojawił się u Fiedlera w [Fie91]. Następnie Turaev wprowadził w [Tur92] pojęcie *gleams* - diagramów na S^2 z komórkami 2-wymiarowymi pokolorowanymi liczbami całkowitymi. Te *gleams* odpowiadają diagramom strzałkowym splotów w wiązках S^1 nad S^2 bez



RYSUNEK 2. dodatkowy ruch Reidemeistera

włókien specjalnych (czyli splotów w przestrzeniach soczewkowych $L_{p,1}$, w szczególności $L_{1,1} = S^3$). Dwa ciekawe wyniki dotyczące gleams są związane z niezmiennikami Vassiliewa (lub skończonego typu). Viro sformułował (1990) hipotezę, że niezmienniki Vassiliewa są wielomianami od gleams (czyli od zmiennych przypisanych komórkom 2-wymiarowym ustalonego diagramu przyjmujących wartości całkowite). Burri, w [Bur97], udowodnił hipotezę w szczególnych przypadkach niezmienników Vassiliewa pochodzących od wielomiana Jonesa, otrzymując w szczególności interesujący wzór na niezmiennik Vassiliewa drugiego stopnia: jest to wielomian stopnia 4 od gleams. Natomiast Goussarov, w [Gou98], udowodnił hipotezę Viro, wykazując, że każdy niezmiennik Vassiliewa stopnia n jest wielomianem stopnia $2n$ od gleams. W następnych latach problem badania węzłów za pomocą rzutowania Hopfa nie był rozważany. Dopiero prace [H7]-[H10] wracają do tych zagadnień.

W [Fie91], Fiedler rozważa dwa rodzaje indeksów skrzyżowań dla węzłów algebraicznych (czyli otrzymanych z osłobliwości krzywych algebraicznych). Dla węzła algebraicznego K , pierwszy indeks, $C_{alg}(K)$, jest minimalną ilością skrzyżowań K przy rzutowaniu Hopfa, gdzie rozważamy wyłącznie realizacje K za pomocą krzywych algebraicznych, podczas gdy dla drugiego indeksu, $h(K)$ (notacja późniejsza), dopuszczamy dowolną (topologiczną) realizację K . W oczywisty sposób $h(K) \leq C_{alg}(K)$. Fiedler znajduje oszacowania dolne dla $C_{alg}(K)$ dla pewnych węzłów algebraicznych K i zadaje pytanie czy powyższa nierówność jest zawsze równością. Zauważa również, że prawie nic nie jest znane w kwestii niezmiennika h .

W [H7], z pomocą diagramów strzałkowych, zostały sklasyfikowane węzły K spełniające $h(K) \leq 1$. Jest to możliwe dzięki zamkniętemu wzorowi na wielomian Jonesa takich węzłów, który je wszystkie rozróżnia (poza jedną parą łatwą do rozróżnienia w inny sposób). Zidentyfikowane są węzły z tabeli Rolfsena (do 10 klasycznych skrzyżowań) spełniające $h(K) \leq 1$. Jest tam również pokazane, że dla węzłów algebraicznych spełniających $h(K) \leq 1$ zachodzi $h(K) = C_{alg}(K)$. Wymaga to w szczególności klasyfikacji wszystkich węzłów algebraicznych spełniających $h(K) \leq 1$.

Okazuje się, że dla węzłów algebraicznych równość $h(K) = C_{alg}(K)$ nie zawsze zachodzi. W [H9] skonstruowane są przykłady węzłów K dla których $C_{alg}(K) - h(K)$ może być dowolnie duże. Daje to odpowiedź na pytanie Fiedlera. Dowód opiera się na tym, że w przypadku klasycznego diagramu węzła K z $c(K)$ skrzyżowaniami, zawierającego skręcenie z m skrzyżowaniami, $h(K)$ jest mniejsze od $c(K)$ o co najmniej (z grubsza) $m/2$. Daje to przykłady dla których $C_{alg}(K)$ jest oszacowane od dołu (dzięki nierówności z [Fie91]), a $h(K)$ od góry i różnica oszacowań jest dowolnie duża. Innym wnioskiem jest duża różnica między $c(K)$ oraz $h(K)$ dla węzłów

torusowych $K = T(2, n)$ czy twistów (z grubsza $h(K) \leq c(K)/2$). Nie są tu jednak znane dolne ograniczenia dla $h(K)$.

W teorii splotów często były rozważane rozmaite ruchy za pomocą których sploty dzieli się na klasy równoważności (dwa sploty są w tej samej klasie jeśli da się przejść z jednego do drugiego za pomocą rozważanych ruchów). Przykłady takich ruchów pojawiają się już u Foxa [Fox58]. Jedne z prostszych takich ruchów, tzw. t_k ruchy, polegające na dodaniu lub usunięciu skręcenia składającego się z k skrzyżowań między dwoma nitkami w splotcie, są analizowane w [Prz88]. Jest tam pokazane, że wartości wielomianu Jonesa w odpowiednich pierwiastkach z 1 (zależnych od k) nie zmieniają się (lub zmieniają w bardzo kontrolowany sposób), przy t_k ruchach.

Stosując diagramy strzałkowe, w [H8] zostały wprowadzone nowe ruchy na splotach, k -ruchy, zdefiniowane w prosty sposób przez dodanie lub usunięcie k strzałek znajdujących się koło siebie. W tej pracy jest pokazane, że wartości wielomianu Jonesa w odpowiednich pierwiastkach z 1 nie zmieniają przy k -ruchach dla nieparzystych k , podczas gdy zmienia się znak przy k parzystych. Jedno z pytań rozważane przy danych ruchach jest to, czy wszystkie węzły leżą w jednej klasie, inaczej mówiąc - czy da się rozwiązać dowolny węzeł stosując serię takich ruchów. Podobnie do sytuacji z t_k ruchami, najtrudniejsze okazują się przypadki $k = 3$ i $k = 4$, jedyne dla których nie ma odpowiedzi na powyższe pytanie. Gdy $k < 3$ każdy węzeł da się rozwiązać k -ruchami. Gdy $k > 4$ istnieje niekończona ilość klas równoważności dla k -ruchów. Oprócz tego, że badanie k -ruchów jest ciekawe samo w sobie, są one naturalnym narzędziem do badania niezmiennika h , gdyż nieskończona ilość węzłów z ograniczonym h daje skończoną ilość klas po podzieleniu przez k -ruchy. Narzędzie to może być bardzo pomocne do obliczenia h dla konkretnych węzłów (np. węzłów z tabeli Rolfsena).

Badając węzły z niskim h i ich wielomiany Jonesa, udało się odkryć w [H10] ciekawe rodziny węzłów z cyklotomicznymi wielomianami Jonesa. Tego typu węzły były rozważane w [CK05] i [CK06]. W obu pracach rozważana jest miara Mahlera wielomianu Jonesa. Pokazane jest, że przy pewnych operacjach ta miara zachowuje się podobnie do objętości hiperbolicznej. W [CK05], autorzy stawiają pytanie dotyczące konstrukcji węzłów których wielomiany Jonesa mają miarę Mahlera 1 (czyli są cyklotomiczne lub ewentualnie są iloczynami wielomianów cyklotomicznych). Praca [H10] daje odpowiedź na ich pytanie: cztery nieskończone rodziny węzłów z wielomianami Jonesa o mierze Mahlera 1 są tam skonstruowane. Jako wniosek pokazane jest, że nieskończenie wiele pierwiastków z 1 są zerami wielomianów Jonesa, co więcej takie zera są gęste w okręgu o promieniu 1. Można to porównać do twierdzenia z [JZDT10], mówiącego że zera wielomianów Jonesa są gęste w \mathbb{C} . Węzły z [H10] są przedstawione za pomocą stosunkowo prostych diagramów strzałkowych. Motywuje to badanie takich prostych diagramów, na przykład z niską ilością skrzyżowań. W niektórych prostych przypadkach da się uzyskać zamknięte wzory dla wielomianu Jonesa.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

Artykuły w czasopiśmie przed uzyskaniem doktoratu

[AD1] M. Mroczkowski, *Diagrammatic unknotting of knots and links in the projective space*, Journal of Knot Theory and Ramifications **12** (2003), no. 5. 637–651.

[AD2] M. Mroczkowski, *Polynomial invariants of links in the projective space*, Proceedings of Knots in Poland 2003, Fundamenta Mathematicae **184** (2004), 223–267.

Artykuły w czasopismach po uzyskaniu doktoratu

[PD1] J. Malesic, M. Mroczkowski *Meridional number of a link and skein modules of the solid torus*, Topology and its Applications **159** (2012), no. 8, 2021–2031.

[PD2] B. Gabrovsek, M. Mroczkowski, *Knots in the solid torus up to 6 crossings*, Journal of Knot Theory and Ramifications **21** (2012), no. 11. 1–43.

5.1 WĘZŁY I SPLOTY W RZECZYWISTEJ PRZESTRZENI RZUTOWEJ

Prace [AD1] i [AD2], składające się na doktorat, dotyczą splotów w przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^3$. Badania nad splotami w tej 3-rozmaitości zapoczątkowała J. Drobotukhina w [Dro90, Dro91, Dro94]. Podstawą jej badań są diagramy splotów w przestrzeni rzutowej: są to diagramy w dysku składające się z krzywych domkniętych oraz łuków których punkty brzegowe leżą na brzegu dysku, zgrupowane w antypodyczne pary. Izotopie ambientalne na splotach odpowiadają 5 ruchom Reidemeistera na takich diagramach (3 klasyczne oraz dwa dodatkowe, *nie* związane z ruchami Reidemeistera dla diagramów strzałkowych). Stosując uogólnienie wielomianu Jonesa na sploty w $\mathbb{R}P^3$ [Dro90], Drobotukhina uzyskuje klasyfikację splotów do 6 skrzyżowań [Dro94].

W [AD1] rozważany jest problem *diagramów schodzących* dla węzłów i splotów w $\mathbb{R}P^3$. Ponieważ $H_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$ istnieją 2 klasy węzłów. Naturalnym wyborem na 2 węzły trywialne są węzły których diagramy nie mają skrzyżowań. W przypadku splotów z co najmniej dwoma składowymi homologicznie nietrywialnymi wybór splotu trywialnego nie jest oczywisty, chociaż można naturalnie wybrać definicję takiego splotu. W [AD1] wykazane jest, że mając dowolny diagram dowolnego węzła istnieje możliwość zamiany niektórych skrzyżowań, tak aby uzyskać diagram węzła trywialnego w tej samej klasie homologii co węzeł wyjściowy. W przypadku splotów nie jest to już możliwe, co pokazuje kontrprzykład z 4 składowymi homologicznie nietrywialnymi. W [AD2] wykorzystane są narzędzia z [AD1] do uogólnienia wielomianu HOMFLYPT na sploty w $\mathbb{R}P^3$. Zastosowaniem jest konstrukcja węzłów z dowolną *odległością od afiniczności*, zdefiniowaną jako minimalna ilość antypodycznych par punktów brzegowych łuków pośród wszystkich diagramów danego węzła (lub splotu).

5.2 WĘZŁY I SPLOTY W PEŁNYM TORUSIE

W pracy [PD1] rozważana jest *liczba południkowa* splotów w pełnym torusie T , wprowadzona w [Mal95]. Dla danego splotu L , liczba ta, oznaczana $v(L)$, jest maksymalną ilością dysków południkowych w T takich, że L da się przekształcić izotopijnie w splot w którym nie ma łuków łączących różne dyski. Na przykład dla prostego łańcucha C_n wokół T o n składowych, $v(C_n) = n$. O ile ograniczenia dla v od dołu polegają na skonstruowaniu danej ilości dysków południkowych dla których żaden łuk nie łączy różnych dysków, ograniczenia od góry uzyskane są przez odpowiednie współczynniki splotów w różnych skein modułach pełnego torusa: HOMFLYPT, Kauffmana, nawiasu Kauffmana i homotopii. Stosując skein moduł nawiasu Kauffmana wykazane jest, że $v(B_n) = 2n$ dla splotów Binga B_n .

W pracy [PD2] zostały sklasyfikowane węzły pierwsze w pełnym torusie do 6 skrzyżowań (istnieje 526 takich węzłów). W tym wypadku węzły są prezentowane

za pomocą klasycznych diagramów w anuluse (a nie diagramów strzałkowych w dysku). Diagramy są rozróżniane za pomocą skein modułów nawiasu Kauffmana i, w nielicznych przypadkach, HOMFLYPT oraz Kauffmana. Rozpoznane są również węzły, które są równe swoim odbiciom lustrzanym (24 przypadki). Dla węzła K w pełnym torusie *liczba zawinięcia* K jest minimalną ilością przecięć K z dowolnym dyskiem południkowym, z dokładnością do izotopii. Hipoteza zawinięcia (*wrapping conjecture*) mówi, że liczba zawinięcia jest równa stopniowi x dla K wyrażonego w skein module nawiasu Kauffmana (gdzie x^k oznacza k koncentrycznych okręgów wokół torusa). Z obliczeń w pracy [PD2] wynika, że hipoteza jest prawdziwa dla węzłów do 6 skrzyżowań.

6. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

- Współpraca z M. Dąbkowskim z UT Dallas skutkująca publikacją [H1]. W czasie współpracy wygłoszenie odczytów na seminariach w UT Dallas:
 - Skein modules of twisted I bundles over unoriented surfaces, wrzesień 2007
 - KBSM of the product of a disk with two holes and S^1 , wrzesień 2008
- Kilkuletnia współpraca z J. Malesic oraz B. Gabrovsek z Uniwersytetu w Lublanie skutkująca pracami [H4], [H5], [PD1], [PD2]. W wyniku tej współpracy byłem również promotorem pomocniczym w doktoracie B. Gabrovseka. W czasie tej współpracy odczyt w Lublanie, luty 2009, Kauffman bracket skein module of the product of a disk with two holes and S^1 .
- Współpraca z S. Lambropoulou i I. Diamantis z National Technical University of Athens oraz B. Gabrovsek z Uniwersytetu w Lublanie w ramach projektu: THALIS - NTUA - Algebraic modeling of topological and computational structures and applications, od 2015, w toku.

7. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

- Wyprowowanie, jako promotor pomocniczy, doktora Bostjana Gabrovsek z Uniwersytetu w Lublanie, 2013
- Wypromowanie 9 studentów na seminarium magisterskim oraz kilkunastu studentów na seminarium licencjackim.
- Wieloletnie prowadzenie licznych wykładów i ćwiczeń z matematyki oraz informatyki, przed doktoratem na Uniwersytecie w Uppsali oraz po doktoracie na Uniwersytecie Gdańskim: szeregi Fouriera, analiza funkcjonalna, geometria różniczkowa, topologia ogólna, teoria liczb, analiza, algebra liniowa, algebra, podstawy programowania, bazy danych...
- Współorganizator 3 konferencji *Knots in Gdansk*, w latach 2017-2019, gromadzących światowych specjalistów z teorii węzłów.
- Juror w konkursie na bajkę matematyczną, zorganizowanym przez UG w 2015.
- Organizator konkursu na jednokadrowy komiks w ramach Roku Matematyki na Pomorzu 2015.

Maciej Moszkowski
(podpis wnioskodawcy)

LITERATURA

- [AF22] José Román Aranda and Nathaniel Ferguson. Generating sets for the Kauffman skein module of a family of Seifert fibered spaces. *New York J. Math.*, 28:44–68, 2022.
- [BP22] Rhea Palak Bakshi and Józef H. Przytycki. Kauffman bracket skein module of the connected sum of handlebodies: a counterexample. *Manuscripta Math.*, 167(3-4):809–820, 2022.
- [Bul95] Doug Bullock. The $(2, \infty)$ -skein module of the complement of a $(2, 2p + 1)$ torus knot. *J. Knot Theory Ramifications*, 4(4):619–632, 1995.
- [Bul97a] Doug Bullock. Estimating a skein module with $SL_2(\mathbb{C})$ characters. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(6):1835–1839, 1997.
- [Bul97b] Doug Bullock. On the Kauffman bracket skein module of surgery on a trefoil. *Pacific J. Math.*, 178(1):37–51, 1997.
- [Bur97] Urs Burri. For a fixed Turaev shadow Jones-Vassiliev invariants depend polynomially on the gleams. *Comment. Math. Helv.*, 72(1):110–127, 1997.
- [BW16] Francis Bonahon and Helen Wong. Representations of the Kauffman bracket skein algebra I: invariants and miraculous cancellations. *Invent. Math.*, 204(1):195–243, 2016.
- [Car17] Alessio Carrega. Nine generators of the skein space of the 3-torus. *Algebr. Geom. Topol.*, 17(6):3449–3460, 2017.
- [CK05] Abhijit Champanerkar and Ilya Kofman. On the Mahler measure of Jones polynomials under twisting. *Algebr. Geom. Topol.*, 5:1–22, 2005.
- [CK06] Abhijit Champanerkar and Ilya Kofman. On links with cyclotomic Jones polynomials. *Algebr. Geom. Topol.*, 6:1655–1668, 2006.
- [Det21] Renaud Detcherry. Infinite families of hyperbolic 3-manifolds with finite-dimensional skein modules. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 103(4):1363–1376, 2021.
- [DL17] Ioannis Diamantis and Sofia Lambropoulou. The braid approach to the HOMFLYPT skein module of the lens spaces $L(p, 1)$. In *Algebraic modeling of topological and computational structures and applications*, volume 219 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 143–176. Springer, Cham, 2017.
- [DL19] Ioannis Diamantis and Sofia Lambropoulou. An important step for the computation of the HOMFLYPT skein module of the lens spaces $L(p, 1)$ via braids. *J. Knot Theory Ramifications*, 28(11):1940007, 25, 2019.
- [DLP16] Ioannis Diamantis, Sofia Lambropoulou, and Jozef H. Przytycki. Topological steps toward the Homflypt skein module of the lens spaces $L(p, 1)$ via braids. *J. Knot Theory Ramifications*, 25(14):1650084, 26, 2016.
- [Dro90] Yu. V. Drobotukhina. An analogue of the Jones polynomial for links in $\mathbb{R}P^3$ and a generalization of the Kauffman-Murasugi theorem. *Algebra i Analiz*, 2(3):171–191, 1990.
- [Dro91] Yu. V. Drobotukhina. Classification of projective Montesinos links. *Algebra i Analiz*, 3(1):118–130, 1991.
- [Dro94] Julia Drobotukhina. Classification of links in $\mathbb{R}P^3$ with at most six crossings [MR1157142 (93b:57006)]. In *Topology of manifolds and varieties*, volume 18 of *Adv. Soviet Math.*, pages 87–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [DW21] Renaud Detcherry and Maxime Wolff. A basis for the Kauffman skein module of the product of a surface and a circle. *Algebr. Geom. Topol.*, 21(6):2959–2993, 2021.
- [Fie91] Thomas Fiedler. Algebraic links and the Hopf fibration. *Topology*, 30(2):259–265, 1991.
- [FKBL19] Charles Frohman, Joanna Kania-Bartoszyńska, and Thang Lê. Unicity for representations of the Kauffman bracket skein algebra. *Invent. Math.*, 215(2):609–650, 2019.
- [Fox58] R. H. Fox. Congruence classes of knots. *Osaka Math. J.*, 10:37–41, 1958.
- [FYH⁺85] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(2):239–246, 1985.

- [GH07] Patrick M. Gilmer and John M. Harris. On the Kauffman bracket skein module of the quaternionic manifold. *J. Knot Theory Ramifications*, 16(1):103–125, 2007.
- [Gil18] Patrick M. Gilmer. On the Kauffman bracket skein module of the 3-torus. *Indiana Univ. Math. J.*, 67(3):993–998, 2018.
- [GJS23] Sam Gunningham, David Jordan, and Pavel Safronov. The finiteness conjecture for skein modules. *Invent. Math.*, 232(1):301–363, 2023.
- [GM19] Patrick M. Gilmer and Gregor Masbaum. On the skein module of the product of a surface and a circle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 147(9):4091–4106, 2019.
- [Gou98] M. N. Goussarov. Interdependent modifications of links and invariants of finite degree. *Topology*, 37(3):595–602, 1998.
- [HP93] Jim Hoste and Józef H. Przytycki. The $(2, \infty)$ -skein module of lens spaces; a generalization of the Jones polynomial. *J. Knot Theory Ramifications*, 2(3):321–333, 1993.
- [HP95] Jim Hoste and Józef H. Przytycki. The Kauffman bracket skein module of $S^1 \times S^2$. *Math. Z.*, 220(1):65–73, 1995.
- [Jon85] Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1):103–111, 1985.
- [JZDT10] Xian’an Jin, Fuji Zhang, Fengming Dong, and Eng Guan Tay. Zeros of the Jones polynomial are dense in the complex plane. *Electron. J. Combin.*, 17(1):Research Paper 94, 10, 2010.
- [Kau90] Louis H. Kauffman. An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318(2):417–471, 1990.
- [LT14] Thang T. Q. Le and Anh T. Tran. The Kauffman bracket skein module of two-bridge links. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(3):1045–1056, 2014.
- [Mal95] Jože Malešič. Meridional number of a link and shrinkability of toroidal decompositions. *Glas. Mat. Ser. III*, 30(50)(2):343–357, 1995.
- [Mar10] Julien Marché. The skein module of torus knots. *Quantum Topol.*, 1(4):413–421, 2010.
- [Prz88] Józef H. Przytycki. t_k moves on links. In *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, volume 78 of *Contemp. Math.*, pages 615–656. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [Prz91] Józef H. Przytycki. Skein modules of 3-manifolds. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 39(1-2):91–100, 1991.
- [Prz99] Józef H. Przytycki. Fundamentals of Kauffman bracket skein modules. *Kobe J. Math.*, 16(1):45–66, 1999.
- [PT88] Józef H. Przytycki and Paweł Traczyk. Invariants of links of Conway type. *Kobe J. Math.*, 4(2):115–139, 1988.
- [Rei27] Kurt Reidemeister. Elementare Begründung der Knotentheorie. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5(1):24–32, 1927.
- [Tur88] V. G. Turaev. The Conway and Kauffman modules of a solid torus. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 167:79–89, 190, 1988.
- [Tur92] Vladimir G. Turaev. Shadow links and face models of statistical mechanics. *J. Differential Geom.*, 36(1):35–74, 1992.