2024-02-26

Prof. dr hab. Tadeusz Krasiński
Katedra Geometrii Algebraicznej i Informatyki Teoretycznej
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego
90-238 Łódź, ul. Banacha 22
E-mail: tadeusz.krasinski@wmii.uni.lodz.pl

Recenzja dorobku habilitacyjnego dr Ewy Tyszkowskiej pt. „Działania grup skończonych na powierzchniach Riemanna i Kleina"

Pani dr Ewa Tyszkowska ukończyła studia magisterskie na kierunku matematyka w 1983 roku. Jej promotorem był algebraik, prof. A. Skowroński. W następnych latach była nauczycielem w szkołach aż do 2001 roku (przez 18 lat). Od roku 2001 pracuje na Uniwersytecie Gdańskim jako pracownik naukowo-dydaktyczny. W 2006 roku obroniła tam rozprawę doktorską pt. „p-hipereliptyczne powierzchnie Riemanna i ich grupy automorfizmów" napisaną pod kierunkiem prof. G. Gromadzkiego. Jej początkowe wykształcenie algebraiczne przyniosło dobre rezultaty w dziedzinie matematyki, którą zajęła się pod kierunkiem prof. G. Gromadzkiego – badaniem grup automorfizmów powierzchni Riemanna i ogólnie powierzchni Kleina metodami algebraicznymi.

Jak wiadomo z klasycznych rozważań, każda powierzchnia Riemanna (na mocy twierdzenia o uniformizacji) jest przestrzenią orbit działania pewnej grupy automorfizmów standardowych jednospójnych powierzchni Riemanna: sfery Riemanna $\overline{\mathbb{C}}$, płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ lub koła jednostkowego K (ta ostatnia powierzchnia Riemanna jest izomorficzna z górną otwartą półpłaszczyzną $\mathcal{H}$). Ponieważ pełnymi grupami automorfizmów tych powierzchni są odpowiednie grupy homografii, to badanie powierzchni Riemanna sprowadza się do badania podgrup grupy homografii (podgrup Fuchsa) i ich przestrzeni orbit. Grupy Fuchsa uniformizujące powierzchnie Riemanna działają bez punktów stałych i oczywiście zachowują orientację (jako odwzorowania holomorficzne). Jeśli zrezygnujemy z tych założeń i rozważymy takie podgrupy, które działają dyskretnie i mają zwarte przestrzenie orbit (nazywane są one NEC *grupami*), to otrzymamy nową, szerszą klasę powierzchni zwanych *powierzchniami Kleina.* W tej klasie oprócz zwykłych powierzchni Riemanna występują również klasyczne nieorientowalne powierzchnie, takie jak butelka Kleina czy wstęga Möbiusa. Mogą to być również powierzchnie z brzegiem. Powierzchnie Kleina można również zdefiniować za pomocą dianalitycznych atlasów (przejścia między mapami mogą być albo analityczne albo antyanalityczne). Badanie powierzchni Kleina (w szczególności powierzchni Riemanna) jest ważnym działem analizy zespolonej jednej zmiennej. Jest to obszerna gałąź, której korzenie sięgają XIX wieku. W tej dziedzinie, począwszy od doktoratu, mieszczą się osiągnięcia dr Ewy Tyszkowskiej.

Wymienia ona w swoim dorobku 23 artykuły naukowe, wszystkie dotyczą wymienionej powyżej dziedziny. Badane są w nich grupy automorfizmów powierzchni Riemanna i Kleina metodami algebraicznymi wykorzystującymi teorię NEC grup. Według miarodajnej, z punktu widzenia matematyki, bazy MSN Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego Kandydatka ma indeks Hirscha 4, liczbę cytowani 57 przy 21 wymienionych pracach. Prace opublikowane są w dobrych czasopismach (4 z osiągnięcia naukowego w czasopismach za 100 punktów). Artykuły spoza osiągnięcia naukowego dotyczą tej samej tematyki: badania powierzchni Riemanna i Kleina metodami algebraicznymi, w szczególności topologicznej

klasyfikacji działań grup skończonych na tych powierzchniach, zbiorów punktów stałych automorfizmów, typów symetrii itp.

Teraz omówię rezultaty zawarte w artykułach osiągnięcia naukowego. Ponieważ nie jestem ekspertem w tej dziedzinie, to omówię je tylko pokrótce.

W najnowszej pracy [H1] Kandydatka bada wiele zagadnień związanych z powierzchniami Kleina przedstawiając je w postaci $\mathscr{H}/\Lambda$ dla pewnej powierzchniowej NEC grupy Λ. Istotną nowością tych badań jest zastosowana metoda nakryć (inna w stosunku do algebraicznych metod stosowanych przez innych autorów). Otrzymuje ona wyniki dotyczące:

1. brzegu powierzchni $\mathscr{H}/\Lambda'$ dla dowolnej normalnej podgrupy $\Lambda' \subset \Lambda$ i w konsekwencji przedstawienia tej podgrupy,
2. topologicznej równoważności działań różnych grup na powierzchniach Kleina,
3. punktów stałych automorfizmów powierzchni Kleina,
4. nowych dowodów znanych twierdzeń o NEC grupach.

Praca ta świadczy o samodzielności i dojrzałości autora. Zastosowanie metody nakryć, mimo że jest to metoda znana i od dawna stosowana, do otrzymania nowych rezultatów i innych dowodów znanych, podstawowych twierdzeń całej tej teorii świadczy o tym dobitnie. Potwierdza, że autorka rozumie i doskonale orientuje się w całej tej teorii.

W pracy [H2] podana jest topologiczna klasyfikacja konforemnych działań grup skończonych na tak zwanych *cyklicznych p-gonalnych powierzchniach Riemanna* dla dowolnej liczby pierwszej p. Takie powierzchnie są p-listnymi regularnymi, rozgałęzionymi nakryciami sfery Riemanna $\overline{\mathbb{C}}$.

Praca [H3], napisana wspólnie z ekspertem w tej dziedzinie A. Weaverem, dotyczy tzw. *eliptyczno-hipereliptycznych powierzchni Riemanna* charakteryzujących się tym, że posiadają one konforemną inwolucję dla której przestrzeń orbit jest powierzchnią rodzaju 1. W pracy badane są powierzchnie eliptyczno-hipereliptyczne dla których grupa konforemnych automorfizmów G ma trójkątną sygnaturę, co oznacza, że X/G jest sferą Riemanna i naturalna projekcja $X \to X/G$ jest rozgałęziona dokładnie nad 3 punktami sfery. Wyznaczono liczbę symetrycznych takich powierzchni (tzn. posiadających symetrie rozumiane jako antykonforemne inwolucje) oraz opisano ilościowo i jakościowo zbiory punktów stałych symetrii.

W pracach [H4], [H5], [H6] badana jest ciekawa rodzina powierzchni Riemanna. Dzięki temu, że powierzchnie Riemanna odpowiadają krzywym algebraicznym definiowanym przez równania wielomianowe o współczynnikach zespolonych, można w przestrzeni moduli M_g klas konforemnych równoważnie powierzchni Riemanna rodzaju g zdefiniować naturalną inwolucję przekształcającą krzywą opisaną danym równaniem na inną opisaną tym samym równaniem ze sprzężonymi współczynnikami. Punkty stałe tej inwolucji nazywane są *zespolonymi krzywymi algebraicznymi z rzeczywistymi modułami* W szczególności są takimi krzywe algebraiczne opisane równaniami o współczynnikach rzeczywistych, odpowiadające *symetrycznym powierzchniom Riemanna*. Okazuje się, że istnieją inne punkty stałe tej inwolucji niedające się zdefiniować przez równania o współczynnikach rzeczywistych. Nazywane są one *pseudo-rzeczywistymi powierzchniami Riemanna*. Udowodniono, że są one nakryciami rzeczywistych powierzchni Riemanna i charakteryzują się istnieniem antykonforemnego automorfizmu. W pracy [H4] podane są warunki konieczne i wystarczające istnienia takich powierzchni rodzaju $g \geq 2$ z pełną grupą automorfizmów $\mathbb{Z}_{4n}$ dla $n = 1$ lub n będącego liczbą pierwszą. W pracy [H5] badany jest ten sam problem istnienia pseudo-rzeczywistych powierzchni Riemanna przy ogólniejszych założeniach (istnienie antykonforemnego automorfizmu rzędu $4k$, $k \geq 1$). Znaleziono też wszystkie możliwe wartości p i q dla p-hiperelitycznych inwolucji i (q,n)-gonalnych automorfizmów tych powierzchni.

W pracy [H6] badane są działania grup skończonych na dwóch powierzchniach Riemanna tego samego rodzaju z których jedna jest symetryczna a druga jest pseudo-

symetryczna. Wyniki oparte są na rozwiązaniu problemu: dla jakich skończonych grup H działających na pewnej powierzchni Riemanna X_0 można skonstruować działania grup $H \rtimes \mathbb{Z}_2$ i $H \rtimes D_{2n}$ na powierzchni Riemanna X tego samego rodzaju co X_0

Prace [H7], [H8] wiążą teorię powierzchni Kleina z teorią algebr Clifforda. W pierwszej pracy udowodniono, że dowolna powierzchnia Kleina Y algebraicznego rodzaju d>1 jest izomorficzna z przestrzenią orbit działania multyplikatywnej podgrupy pewnej algebry Clifforda na powierzchni Riemanna rodzaju $1 + 2^{d+1}(d-1)$. Takie działanie nazwano działaniem Clifforda definiującym powierzchnię Y. Pozwoliło to na znalezienie reprezentacji grupy podstawowej powierzchni Y poprzez wykorzystanie reprezentacji spinorowej odpowiedniej algebry Clifforda. W drugiej pracy wprowadzono porządek częściowy na zbiorze wszystkich powierzchni Kleina oparty na działaniach Clifforda definiujących te powierzchnie. Następnie udowodniono, że dowolna powierzchnia Kleina Y może być zdefiniowana indukcyjnie przy wykorzystaniu działania Clifforda definiującego element minimalny łańcucha do którego Y należy.

Pozostałe artykuły naukowe, niewchodzące w skład osiągnięcia naukowego, dotyczą tej samej tematyki - badania powierzchni Riemanna i Kleina w tych samych aspektach: działania grup na tych powierzchniach, w szczególności grup automorfizmów, zbioru punktów stałych itp. Sprawia to wrażenie pewnej monotoniczności, braku szerszych horyzontów, braku chęci rozszerzenia tematyki lub przynajmniej powiązania z innymi działami matematyki. Jedynie dwie ostatnie prace osiągnięcia naukowego rozszerzają tematykę na teorię algebr Clifforda. Jednak wszystkie prace dotyczą konkretnych, naturalnych problemów teorii. Są one bardzo szczegółowe, techniczne z narzuconymi wieloma założeniami. Z tego powodu są to wyniki szczegółowe. Są one skomplikowane technicznie, choć często zdarza się to w twierdzeniach klasyfikujących pewne klasy obiektów. Rozszerzają one jednak wiedzę w klasycznej teorii powierzchni Riemanna i nowszej teorii powierzchni Kleina. Oczywiście wymagają one dużej biegłości i znajomości tematyki. Jak zauważyłem powyżej świadczy to o dojrzałości naukowej Kandydatki.

Kandydatka brała udział w grantach, choć nie miała samodzielnych. Współpracowała ze znanymi ekspertami w tej dziedzinie: A. Weaverem, E. Bujalancem i G. Gromadzkim. Referowała swoje osiągnięcia na wielu konferencjach międzynarodowych.

Podsumowując uważam, że osiągnięcia dr Ewy Tyszkowskiej wniosły istotny wkład w rozwój dziedziny matematyka i z przekonaniem popieram wniosek o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie matematyki.

T. Kraśiński