

# Autoreferat

Waldemar Jarosław Kłobus



Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki  
Uniwersytet Gdański  
Gdańsk  
2023

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Imię i nazwisko</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1. pkt 2 ustawy</b>	<b>3</b>
4.1	Tytuł osiągnięcia naukowego . . . . .	3
4.2	Wykaz publikacji stanowiących osiągnięcie habilitacyjne . . . . .	3
4.3	Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników . . . . .	4
4.3.1	Wstęp . . . . .	4
4.3.2	Podsumowanie . . . . .	5
4.3.3	Potencjał komunikacyjny układu wielocząstkowego jako efekt łamania relacji monogamii . . . . .	9
4.3.4	Kompromis między zaburzeniem a uzyskiwaną informacją jako efekt więzu niesygnalizowania oraz stopnia korelacji układu wielocząstkowego . . . . .	12
4.3.5	Kooperacyjny zysk informacyjny jako efekt współzależności układu wielocząstkowego . . . . .	14
4.3.6	Analiza relacji splątania kwantowego i tensora korelacji . . . . .	18
4.3.7	Analiza transferu splątania kwantowego do układu o zmienionej wymiarowości . . . . .	23
4.3.8	Dynamika chaotyczna jako efekt oddziaływań kwantowego układu złożonego . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę</b>	<b>29</b>
5.1	Osiągnięcia dydaktyczne . . . . .	29
5.1.1	Promotorstwo prac doktorskich . . . . .	29
5.1.2	Nauczanie akademickie . . . . .	29
5.2	Osiągnięcia organizacyjne . . . . .	30
5.3	Osiągnięcia w popularyzowaniu nauki . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Inne osiągnięcia naukowe</b>	<b>31</b>
6.1	Nagrody . . . . .	31
6.2	Dodatkowe osiągnięcia naukowo-badawcze po uzyskaniu stopnia naukowego doktora . . . . .	31
6.3	Osiągnięcia naukowo-badawcze z okresu poprzedzającego nadanie stopnia naukowego doktora . . . . .	32
6.3.1	Badania uwzględnione w doktoracie . . . . .	32
6.3.2	Badania nieuwzględnione w doktoracie . . . . .	33
6.4	Dane naukometyczne . . . . .	34

## 1 Imię i nazwisko

Waldemar Jarosław Kłobus

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne

- **Stopień naukowy doktora** w dziedzinie nauk fizycznych w zakresie fizyki  
Instytucja: Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu  
Tytuł rozprawy: *Wybrane własności korelacji w mechanice kwantowej i ogólnych teoriach probabilistycznych*  
Promotor: prof. dr hab. Andrzej Grudka  
Promotor pomocniczy: prof. UG dr hab. Karol Horodecki  
Recenzenci: prof. dr hab. Marek Kuś, prof. dr hab. Karol Życzkowski  
Obrona rozprawy doktorskiej: 17.07.2014, Poznań  
Nadanie stopnia naukowego: 19.09.2014, Poznań
- **Tytuł zawodowy magistra** na kierunku fizyka w specjalności fizyka teoretyczna  
Instytucja: Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu  
Tytuł pracy magisterskiej: *Uporządkowania magnetyczne i ładunkowe oraz separacja faz w rozszerzonym modelu Hubbarda*  
Promotor: prof. dr hab. Stanisław Robaszkiewicz  
Ocena: bardzo dobry  
Nadanie tytułu zawodowego: 7.07.2009, Poznań

## 3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- 1.02.2021 – do teraz: **Adiunkt** (pełny etat naukowo-dydaktyczny)  
Instytucja: Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański  
Bezpośredni przełożony: prof. UG dr hab. Marek Krośnicki  
Zagadnienia badawcze: korelacje wielocząstkowe, detekcja wielocząstkowego splątania kwantowego, metody pośredniej detekcji splątania
- 01.02.2018 – 31.01.2021: **Adiunkt** (staż podoktorski)  
Instytucja: Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański  
Źródło finansowania: Narodowe Centrum Nauki, grant: Beethoven nr 2016/23/G/ST2/04273  
Bezpośredni przełożony: prof. dr hab. Wiesław Laskowski  
Zagadnienia badawcze: charakteryzacja korelacji wielocząstkowych, detekcja wielocząstkowego splątania kwantowego
- 12.2014 – 12.2016: **Asystent naukowy** (staż podoktorski)  
Instytucja: Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu  
Źródło finansowania: Europejska Rada ds. Badań Naukowych, grant: ERC Advanced Grant QOLAPS  
Bezpośredni przełożony: prof. dr hab. Andrzej Grudka  
Zagadnienia badawcze: teoretyczne podstawy i zastosowanie zasobów kwantowych, splątania kwantowego, nielokalności i kontekstualności

- 04.2012 – 11.2014: **Asystent naukowo-badawczy**  
Instytucja: Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu  
Źródło finansowania: Europejska Rada ds. Badań Naukowych, grant: ERC Advanced Grant QOLAPS  
Bezpośredni przełożony: prof. dr hab. Andrzej Grudka  
Zagadnienia badawcze: teoretyczne podstawy i zastosowanie zasobów kwantowych, splątania kwantowego, nielokalności i kontekstualności

## 4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1. pkt 2 ustawy

### 4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Cykl powiązanych tematycznie publikacji naukowych pt.:

*Analiza układów złożonych i wpływu nieklasycznych korelacji na ich własności*

### 4.2 Wykaz publikacji stanowiących osiągnięcie habilitacyjne

- 1) *“Transition from order to chaos in reduced quantum dynamics”*  
**W. Kłobus**, P. Kurzyński, M. Kuś, W. Laskowski, R. Przybycień, K. Życzkowski  
Physical Review E **105**, 034201 (2022)  
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.034201>  
ArXiv: <https://arxiv.org/abs/2111.13477>
- 2) *“Cooperation and dependencies in multipartite systems”*  
**W. Kłobus**, M. Miller, M. Pandit, R. Ganardi, L. Knips, J. Dziewior, J. Meinecke, H. Weinfurter, W. Laskowski, T. Paterek  
New Journal of Physics **23**, 063057 (2021)  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/abfb89>  
ArXiv: <https://arxiv.org/abs/2003.12489>
- 3) *“Gaussian state entanglement witnessing through lossy compression”*  
**W. Kłobus**, P. Cieśliński, L. Knips, P. Kurzyński, W. Laskowski  
Physical Review A **103**, 032412 (2021)  
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.032412>  
ArXiv: <https://arxiv.org/abs/2008.11733>
- 4) *“k-uniform mixed states”*  
**W. Kłobus**, A. Burchardt, A. Kołodziejski, M. Pandit, T. Vertesi, K. Życzkowski, W. Laskowski  
Physical Review A **100**, 032112 (2019)  
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.032112>  
ArXiv: <https://arxiv.org/abs/1906.01311>
- 5) *“Higher dimensional entanglement without correlations”*  
**W. Kłobus**, W. Laskowski, T. Paterek, M. Wieśniak, H. Weinfurter  
The European Physical Journal D **73**, 29 (2019)  
DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2018-90446-6>  
ArXiv: <https://arxiv.org/abs/1808.10201>

6) *“Measurement uncertainty from no-signaling and nonlocality”*

J. Łodyga, **W. Kłobus**, R. Ramanathan, A. Grudka, M. Horodecki, R. Horodecki  
Physical Review A **96**, 012124 (2017)

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.012124>

ArXiv: <https://arxiv.org/abs/1702.00078>

7) *“Communication strength of boxes violating monogamy relations”*

**W. Kłobus**, M. Oszmaniec, R. Augusiak, A. Grudka  
Foundations of Physics **46**, 620 (2016)

DOI: <https://doi.org/10.1007/s10701-015-9983-5>

ArXiv: <https://arxiv.org/abs/1408.1223>

### 4.3 Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników

Zaprezentowane osiągnięcie naukowe stanowi cykl powiązanych tematycznie publikacji naukowych będących pracami zbiorowymi. Szczegółowe omówienie wkładu aplikanta do każdej z prac przedstawione zostało w rozdziale 1 załączonego dokumentu *Wykaz osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny*, z kolei wkład pozostałych współautorów został przedstawiony w oświadczeniach załączonych jako odrębny dokument. Niniejsza prezentacja będzie miała następujący układ: w pierwszej kolejności wyszczególnione zostaną cele naukowe, które przyświecały prowadzeniu badań o określonej tematyce, następnie w skróconej formie omówiony zostanie kontekst, w którym podjęte zostały cele naukowe oraz główne wyniki prac będących realizacją podjętych badań, z kolei omówienie treści publikacji naukowych stanowiących cykl prac nastąpi kolejno w następnych podrozdziałach. Należy przy tym zwrócić uwagę, iż przyjęta notacja cechować się może powtarzalnością oznaczeń przypisywanych różnym pojęciom występującym w różnych podrozdziałach. Tak przyjęty sposób oznaczeń został wybrany z uwagi na zachowanie spójności z konwencyjną notacją stosowaną w opublikowanych artykułach. Tym samym, w niniejszej prezentacji znaczenie odpowiednich wyrażeń będzie określone niezależnie w poszczególnych podrozdziałach (np.  $p$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $D$ ,  $C$ , etc.).

W dalszej części niniejszego omówienia przyjęta została następująca konwencja dotycząca referencji:

- [H1]–[H7] odnoszą się do publikacji należących do cyklu habilitacyjnego,
- [O1]–[O17] odnoszą się do innych publikacji, których aplikant jest współautorem, a które nie należą do cyklu habilitacyjnego,
- [R1]–[R97] odnoszą się do pozostałych pozycji.

#### 4.3.1 Wstęp

Przyznana w ubiegłym roku Nagroda Nobla w dziedzinie fizyki „za eksperymenty ze splątanymi fotonami, ustalenie łamania nierówności Bella i pionierską informatykę kwantową” stanowi o istotnym znaczeniu tej prężnie rozwijającej się gałęzi fizyki wyrosłej z rozważań nad fundamentalnymi pytaniami dotyczącymi struktury teorii fizycznych i umiejscowienia ich w szerszym kontekście. Już od samego początku formułowania zasad mechaniki kwantowej dostrzegano jej implikacje niemające odpowiedników w klasycznym opisie zjawisk. Rozważania na temat nieoznaczoności będącej efektem niekompatybilności pomiarów stały się podstawą do dociekań nt. aspektów fundamentalnych samej teorii. Paradoks EPR [R1] w tym względzie był niczym innym jak próbą zrozumienia kwantowo-mechanicznego opisu fizycznej rzeczywistości wykorzystującą w istocie na swój użytek szczególne korelacje układu złożonego. Trzy dekady później dalsze rozważania nt. charakteru korelacji pozwoliły na sformułowanie testu

[R2, R3] pozwalającego eksperymentalnie zweryfikować intuicyjne założenia dotyczące fizycznych parametrów opisujących rzeczywistość.

Te z gruntu filozoficzne, jak wydawać by się mogło, rozważania z czasem jednak stały się podstawą umożliwiającą rozwój kwantowych technologii przetwarzania informacji, takich jak kryptografii kwantowej [R4], obliczeń kwantowych [R5], czy bezpiecznych algorytmów [R6, R7], by wymienić tylko niektóre. Świadczy to najlepiej o potrzebie zarówno badań fundamentalnych nad mechaniką kwantową jak i określaniu jej relacji z pozakwantowymi zasadami, jak i związków z klasycznymi efektami, które w kwantowym ujęciu mogą nabrać nowego znaczenia. Jednym ze sposobów mogących przyczynić się do dalszego rozwoju dziedziny jest analiza układów złożonych pod kątem wpływu ich wzajemnych korelacji na ich własności.

Celem zaprezentowanych badań w ramach przedstawionego osiągnięcia naukowego było istotne poszerzenie wiedzy na temat natury korelacji wielocząstkowych układów złożonych i wynikających z nich efektów, zarówno w odniesieniu do korelacji kwantowych, jak i ich relacji z pozakwantowymi ograniczeniami. Szczegółowe cele, na których skupiają się badania w przedstawionym cyklu prac, można określić na sposób poniższego zestawienia:

- badanie efektów łamania ograniczeń na korelacje układów wielocząstkowych,
- badanie pozakwantowych ograniczeń na korelacje układów wielocząstkowych wpływających na efekty uzyskiwane w ramach formalizmu kwantowego,
- charakteryzacja korelacji układów wielocząstkowych i badanie ich użyteczności w określonych protokołach kwantowych,
- przedstawienie metody transferu splątania kwantowego na układy o zmienionej wymiarowości,
- badanie charakterystyk korelacji wielocząstkowych i ich użyteczności do charakteryzacji wielocząstkowego splątania kwantowego,
- przedstawienie metody konstrukcji i badanie własności wielocząstkowych stanów maksymalnie splątanych i ich uogólnień,
- badanie wpływu oddziaływań układów wielocząstkowych na ich dynamikę i określenie warunków prowadzących do zachowań chaotycznych.

#### 4.3.2 Podsumowanie

W ostatnich latach w badaniach naukowych wiele uwagi poświęcono analizie korelacji niesygnalizujących sformułowanych jako rodziny rozkładów prawdopodobieństw  $\{p(x, y, z|X, Y, Z)\}$  wyników pomiarów otrzymywanych w eksperymentach bellowskich przez przestrzenie rozdzielonych obserwatorów [R8, R9]. Korelacje niesygnalizujące określone są przez takie rozkłady prawdopodobieństw, których prawdopodobieństwa otrzymywanych wyników przez pewnych obserwatorów (np.  $x, y$ ) nie zależą od wyboru ustawień pomiarowych dokonywanych przez pozostałych obserwatorów (np.  $Z$ ):

$$\sum_z p(x, y, z|X, Y, Z) = \sum_z p(x, y, z|X, Y, Z'). \quad (1)$$

Wtedy też korelacje wyników pomiarów  $X$  i  $Y$  spełniają  $\langle XY \rangle_Z = \langle XY \rangle_{Z'} \equiv \langle XY \rangle$ . Jedną z fundamentalnych cech wielocząstkowych korelacji niesygnalizujących jest ich własność monogamii [R10, R11, R12] stanowiąca, że jeśli w układzie współdzielonym przez przykładowo trzy osoby (Alka, Bolka i Edka) korelacje dwojga z nich (Alka i Bolka) łamią określoną nierówność Bella, to korelacje trzeciej osoby (Edka) z pozostałymi stają się znacząco ograniczone. Własność ta ma istotne znaczenie w zastosowaniach w dziedzinie bezpieczeństwa kryptografii [R13] opartej na zasadzie niesygnalizowania, czy też wzmacnianiu losowości [R14, R15], które

to efekty są niemożliwe w przypadku wykorzystania korelacji klasycznych. W ostatnim czasie w kontekście problemu utraty informacji w czarnych dziurach wskazano [R16], że relacje monogamii mogą być łamane, tak iż dokonując pomiarów na cząstkach w „poligamicznym stanie splątanym” uzyskać można korelacje łamiące (1) [R17]. Tego typu korelacje sygnalizujące mogą z kolei być użyte celem przesyłania informacji między użytkownikami. Warto wspomnieć, że relacje monogamii mogą być łamane w mechanice kwantowej [R18, R19] w przypadku, gdy pozwoli się na dokonanie postselekcji w eksperymentach bellowskich.

W pracy [H1] rozważamy potencjał komunikacyjny układu, jako efekt łamania relacji monogamii. W tym celu rozważamy układ trójcząstkowy i określoną dla niego relację monogamii [R11]. Wskazujemy w jaki sposób w przypadku łamania monogamii stworzyć można kanał komunikacyjny pozwalający na przesyłanie klasycznej informacji między użytkownikami. Określiśmy minimalną pojemność informacyjną takiego kanału w zależności od stopnia łamania relacji monogamii dla nierówności CHSH oraz ogólnej łańcuchowej nierówności Bella. Prezentujemy ponadto alternatywny dowód relacji monogamii (dla nierówności CHSH [R3] oraz ogólnej łańcuchowej nierówności Bella [R20]), który pozwala na zrozumienie w jaki sposób zasada niesygnalizowania ogranicza korelacje wyników otrzymany w eksperymentach bellowskich.

Wspomniane wcześniej korelacje niesygnalizujące studiowane były również celem zrozumienia jakie fizyczne zasady wpływają na ograniczenia korelacji uzyskiwanych w ramach formalizmu mechaniki kwantowej oraz efektów kwantowych (takie jak redukcja złożoności obliczeniowej, kwantowe przyspieszenie obliczeń, wzmacnianie losowości, czy dystrybucja klucza kryptograficznego), które mogłyby zostać otrzymane bez odnoszenia się do zasad mechaniki kwantowej. Istotnie, by uzyskać pewne nieklasyczne efekty nie jest koniecznym stosowanie pełnego formalizmu kwantowego: przykładowo, bezpieczna dystrybucja klucza kryptograficznego może być zapewniona wyłącznie na gruncie zasady niesygnalizowania oraz Nielokalności Bella [R13]. Jednakże w tym względzie zasada nieoznaczoności [R21] jako nieklasyczny efekt, który jest wbudowany w formalizm kwantowy jak dotąd nie została ilościowo uzyskana na gruncie zasady niesygnalizowania i Nielokalności Bella. Zasada nieoznaczoności może być określana dwojako: jako nieoznaczoność przygotowania układu, stanowiąca, że nie jest możliwe przygotowanie układu fizycznego w stanie dającym niezaburzone statystyki wyników dwóch niekompatybilnych pomiarów jednocześnie [R22, R23], oraz nieoznaczoność pomiarowa, stanowiąca, że akt pomiaru jednej obserwabli zaburza statystyki wyników pomiaru innej obserwabli [R24, R25]. Nieoznaczoność pomiarowa może być sformułowana jako kompromis między zaburzeniem stanu układu a ilością uzyskiwanej informacji o stanie układu [R26, R27].

W pracy [H2] otrzymujemy ilościowy opis nieoznaczoności pomiarowej w formie kompromisu między informacją, którą można uzyskać w procesie pomiaru obserwabli a zaburzeniem układu powodowanym przez proces pomiaru. Relację nieoznaczoności otrzymujemy odwołując się jedynie do zasady niesygnalizowania i Nielokalności Bella. W tym celu rozważamy scenariusz, w którym dwoje przestrzennie rozdzielonych użytkowników (Alek i Bolek) dysponują układem fizycznym przejawiającym Nielokalność Bella, na którym dokonują następujących po sobie pomiarów obserwabli na swoich podukładach. Jak wykazujemy, sam akt pomiaru pierwszej obserwabli dokonany przez Boleka zaburza statystyki drugiego pomiaru, nawet w przypadku wykonania tzw. pomiaru łagodnego, za pomocą którego nie uzyskuje on pełnej wiedzy o wyniku. Wykazujemy w sposób ilościowy, że zaburzenie powodowane pomiarem zależy nie tylko od ilości informacji uzyskanej w pierwszym pomiarze, ale również od siły wzajemnych korelacji charakteryzowanych stopniem łamania odpowiedniej nierówności Bella. Wskazuje to, że nieoznaczoność pomiarową w przypadku układów wielocząstkowych określić można jako efekt siły wzajemnych korelacji, w dodatku niezależny od formalizmu kwantowego. Uzyskany kompromis między zaburzeniem a uzyskiwaną informacją może mieć potencjał aplikacyjny w metodach kryptografii opartej na przesyłaniu cząstek w określonym stanie (jak w przypadku protokołu BB84).

Jednym z podstawowych problemów badania układów wielocząstkowych jest identyfikacja i mierzalność różnego typu współzależności międzypodukładowej pod kątem ich możliwych zastosowań, zarówno dotyczących układów klasycznych jak i kwantowych. Zagadnienie mierzalności korelacji układów złożonych znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauk [R28, R29, R30, R31, R32, R33], takich jak m.in. genetyka, neuronauka, socjologia, czy ekonomia, jak również w fizyce i teorii przetwarzania informacji, gdzie analizie poddano różne miary korelacji wielocząstkowych [R34, R35, R36]. Wiele z miar ilościujących korelacje wielocząstkowe definiowanych jest w sposób wymagający przeprowadzenia złożonych procesów optymalizacyjnych trudnych do praktycznej implementacji numerycznej.

W pracy [H3] definiujemy obliczeniowo prostą miarę zależności międzypodukładowej układu wielocząstkowego określoną jako informacyjny zysk, który w wyniku kooperacji uzyskuje grupa osób współdzieląca układ wielocząstkowy względem innego skorelowanego z nimi układu. Zdefiniowana przez nas miara, zwana dalej współzależnością, opiera się na wykorzystaniu warunkowej wzajemnej informacji, wielkości szeroko wykorzystywanej w klasycznej i kwantowej teorii informacji [R37, R38, R39, R40, R41, R42, R43, R44, R45]. Określamy podstawowe własności miary ilościującej współzależność i wskazujemy na wspólne cechy współzależności z miarami prawdziwie wielocząstkowych korelacji [R46]. Jak się okazuje, miara współzależności charakteryzuje innego typu zależności międzypodukładowe niż splątanie kwantowe, choć w określonych przypadkach miara współzależności ma charakter świadka splątania kwantowego stanów mieszanych. Pokazujemy, że miara współzależności ma potencjał aplikacyjny poprzez ilościowe określenie minimalnej wydajności kwantowego protokołu współdzielenia sekretu [R47]. Wskazujemy również na optymalne stany kwantowe w sensie maksymalizowania miary współzależności.

Jak wykazaliśmy powyżej, splątanie kwantowe jest zasobem jakościowo różnym względem układów charakteryzujących się niezerową miarą wielocząstkowej współzależności. W dalszej kolejności zajmujemy się relacjami splątania kwantowego układu wielocząstkowego  $\rho$  i jego korelacji charakteryzowanych tensorem korelacji  $T_{\mu_1 \dots \mu_N} = \text{Tr}(\rho \sigma_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{\mu_N})$ , którego odpowiednie składowe w dalszej części będziemy nazywać elementami. Jak wiadomo, czyste stany  $N$ -cząstkowe są splątane wtedy i tylko wtedy, gdy suma kwadratów wszystkich elementów tensora korelacji  $N$ -tego rzędu ( $\mu_i \neq 0$  dla wszystkich  $i$ ) przekracza pewne wartości [R48, R49, R50, R51], które określić można dla dowolnej liczby cząstek  $N$  układu oraz dowolnej wymiarowości  $d$  podukładow. Okazuje się jednak, że w przypadku mieszanych stanów  $N$  kubitów ( $d = 2$ ) niemożliwa jest charakteryzacja splątania wykorzystująca  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji; istnieją bowiem prawdziwie wielocząstkowo splątane stany  $N$  kubitów ze znikającymi  $N$ -cząstkowymi elementami tensora korelacji [R52, R53, R54]. Nie jest jednak jasne, czy jest to cecha właściwa jedynie układom wyłącznie 2-wymiarowym.

W pracy [H4] dowodzimy, że zerowanie  $N$ -cząstkowych elementów tensora korelacji możliwe jest również w przypadku prawdziwie wielocząstkowo splątanych stanów o wyższej wymiarowości. Wprowadzając odwzorowanie zmieniające znak elementów tensora korelacji odpowiedniego rzędu przedstawiamy uogólniony schemat konstrukcji stanów układów  $N$  kuditów mających tę cechę, że wszystkie  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji zerują się. Ponadto podajemy przykład mieszanych stanów z zerującymi się  $N$ -cząstkowymi elementami tensora korelacji, które jednak są prawdziwie wielocząstkowo splątane. Tym samym pokazujemy, że dla stanów mieszanych  $N$  kuditów nie istnieją kryteria prawdziwie wielocząstkowego splątania oparte o  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji.

Drugie z poruszanych zagadnień dotyczących wielocząstkowego splątania kwantowego odnosi się do opisu stanów absolutnie maksymalnie splątanych (AME). Czyste stany AME  $N$ -cząstek stanowią wielocząstkowe uogólnienie pojęcia czystych stanów maksymalnie splątanych [R55] dwóch cząstek w tym sensie, że każda  $\lfloor N/2 \rfloor$ -cząstkowa redukcja prowadzi do stanu maksymalnie zmieszanego. Z kolei dowolny stan o tej własności, że każde  $k$ -cząstkowe redukcje są maksymalnie zmieszane określamy stanami  $k$ -jednorodnymi. Okazuje się, że o ile



dla  $N = 5$  i  $N = 6$  kubitów można znaleźć postać czystych stanów AME [R56], to w ogólności stany AME nie istnieją dla dowolnych  $N$ , co pokazano m.in. dla  $N = 4$  [R57] i  $N = 7$  [R58]. Ograniczenie na istnienie stanów AME dla dowolnej liczby cząstek  $N$  nie występuje jednak, o ile przestrzeń Hilberta jednocząstkowych podukładów będzie dostatecznie duża [R59].

W przypadku, gdy dla określonej liczby cząstek  $N$  nie istnieje czysty stan  $k$ -jednorodny, pojawia się pytanie o to, jaka jest największa czystość, jaką może mieć  $k$ -jednorodny stan  $N$ -cząstkowego układu. Praca [H5] poświęcona została analizie tego problemu. W pierwszej kolejności charakteryzujemy stany  $k$ -jednorodne wykorzystując elementy tensora korelacji odpowiedniego rzędu, co pozwala na sprawną analizę numeryczną zagadnienia. Przedstawiamy ogólną metodę konstrukcji stanów  $k$ -jednorodnych wykorzystującą wielocząstkowe macierze Pauliego (dalej zwane generatorami) spełniające określone warunki. Znajdujemy jawne postaci generatorów pozwalających uzyskać wszystkie stany  $k$ -jednorodne o najwyższej czystości dla  $N \leq 6$  kubitów (uwzględniając czyste stany AME) oraz innych. Wskazujemy, że wysoka czystość określonych stanów  $k$ -jednorodnych przy znikających elementach tensora korelacji niższych rzędów skutkuje tym, że znalezione stany przejawiają silnie nieklasyczne własności, takie jak prawdziwie wielocząstkowe splątanie, czy możliwość złamania nierówności Bella.

W minionych latach dokonano ogromnego postępu w generowaniu stanów splątanych. W tego typu eksperymentach pojawiają się jednak pytania dotyczące potwierdzenia wytworzenia splątania, wykrywania jego obecności i ilościowego określenia stopnia splątania. Jak dotąd przedstawione zostały różne metody detekcji splątania, obejmujące testy Bella, pomiar świadków splątania, nierówności entropowe i inne [R60, R61]. Detekcja splątania kwantowego staje się bardziej problematyczna w przypadku układów o wyższych wymiarach i często wymaga dokonania tomografii stanu układu kwantowego [R62], co pociąga konieczność wykonania pomiarów, których liczba rośnie wykładniczo wraz z wymiarowością układu.

W pracy [H6] rozpatrujemy problem uzyskiwania informacji o splątaniu kwantowym w obrębie pewnego układu o wysokiej wymiarowości, bez konieczności wykonywania tomografii stanu tego układu. W tym celu, do układu, którego splątanie chcemy zweryfikować, a którego bezpośrednia analiza jest trudna do wykonania, dołączamy inny układ o zmienionej wymiarowości, umożliwiającą dokonanie pomiarów określających jego stan. Pokazujemy, że z pomocą określonego typu oddziaływania pomiędzy układami możliwy jest transfer splątania pomiędzy układem pierwszym i drugim, który również umożliwia certyfikowanie splątania układu pierwszego poprzez analizę drugiego układu o zmienionej wymiarowości. Ze względu na zmniejszenie wymiarowości układu, który ostatecznie poddany zostaje analizie widzimy, że nie jest możliwy pełny transfer stanu z jednego układu do drugiego. Niemniej pokazujemy, że nawet w ten sposób określona stratna kompresja stanu pozwala na uzyskanie informacji na temat splątania stanu wyjściowego.

Ostatnim z zagadnień badawczych niniejszej prezentacji jest analiza dynamiki układu wielocząstkowego prowadzącej do zachowań chaotycznych. W minionych latach wiele uwagi poświęcono badaniu własności kwantowych odpowiedników klasycznych układów chaotycznych mogących pomóc w zrozumieniu powiązań mechaniki klasycznej i kwantowej [R63]. W tym względzie przeprowadzono szereg analiz dotyczących modelu uderzanego rotatora jako przykładu klasycznej dynamiki chaotycznej oraz odpowiadającej jej unitarnej ewolucji kwantowej, która zachodzi w skończonej przestrzeni Hilberta [R64, R65, R66, R67, R68, R69]. Ów model opisuje zachowanie spinu w stałym polu magnetycznym, który jest poddawany okresowej sekwencji nieliniowych impulsów (uderzeń). W ostatnim czasie wskazano [R70], że istnieje ścisły związek pomiędzy entropią splątania kwantowego układu wielu cząstek, a dynamiką chaotyczną klasycznego układu uderzanego rotatora, będącego klasycznym odpowiednikiem układu  $N$  spinów. Tym samym sugeruje się, że splątanie kwantowe powinno odgrywać zasadniczą rolę przy formułowaniu kwantowego odpowiednika teorii Kołmogorowa-Arnolda-Mosera.

O ile w rozważanych przypadkach dynamika całego układu wielopodukładowego jest unitarna, dynamika zredukowana do wybranego podukładu może mieć charakter nieliniowy. W pracy [H7] analizujemy własności nieliniowej dynamiki pojedynczego kubitu otrzymanej przez częściową redukcję reszty układu. W rozważanym modelu układu oddziałujących spinów każda z cząstek poddana jest działaniu kanału tłumiącego amplitudę. Pokazujemy, że w zależności od parametru tłumienia, układ przejawia zróżnicowany charakter zachowań. Przeprowadzona analiza wskazuje, że obserwowane wcześniej w przypadku układów klasycznych zjawisko podwajania okresu i dochodzenie do chaosu w scenariuszu Feigenbauma [R71] przejawia się również w zredukowanych dynamikach układów kwantowych.

### 4.3.3 Potencjał komunikacyjny układu wielocząstkowego jako efekt łamania relacji monogamii

W pracy [H1] poddajemy analizie korelacje układu wielocząstkowego pozwalające na złamanie relacji monogamii. W tym przypadku dany układ również będzie łamał zasadę niesygnalizowania. Powstaje zatem naturalne pytanie o to, w jaki sposób dany układ sygnalizujący można wykorzystać do przesyłania informacji pomiędzy osobami, które go współdzielą oraz ile informacji można w ten sposób przesłać. Celem odpowiedzi na to pytanie, w pierwszej kolejności wypracujemy relację monogamii w charakterystyczny sposób, odmienny od tych, które były prezentowane dotychczas w literaturze [R11], a który pozwala zrozumieć więzy, jakie zasada niesygnalizowania nakłada na korelacje otrzymywane w doświadczeniu bellowskim. Rozważmy zatem układ fizyczny współdzielony przez 3 osoby, na którym każda z nich dokonuje pomiaru pewnej obserwacji (odpowiednio  $X$ ,  $Y$  i  $Z$ ) dającego wyniki  $\pm 1$  z łącznym rozkładem prawdopodobieństwa  $p(XYZ)$ . Prawdziwa jest nierówność

$$(-1)^i \langle XY \rangle_Z + (-1)^j \langle YZ \rangle_X + (-1)^k \langle XZ \rangle_Y \leq 1, \quad (2)$$

dla dowolnych  $i, j, k = 0, 1$  takich, że suma  $i + j + k$  jest nieparzysta, z kolei dolny indeks wyznacza kontekst (pomiar trzeciej obserwacji), w którym dokonano pomiaru dwóch pozostałych obserwacji. Jeśli z kolei rozważymy scenariusz CHSH, gdzie zarówno Alek, jak i Bolek mogą dokonywać pomiaru jednej z dwóch obserwacji, oraz dodatkowo odseparowany przestrzennie Edek dokonuje pomiaru pewnej innej obserwacji, to dla każdego kontekstu istnieć musi łączny rozkład prawdopodobieństwa  $p(A_i B_j E)$ , a co za tym idzie spełnione muszą być nierówności

$$\langle A_0 B_0 \rangle_E + \langle B_0 E \rangle_{A_0} - \langle A_0 E \rangle_{B_0} \leq 1, \quad (3)$$

$$\langle A_1 B_0 \rangle_E + \langle B_0 E \rangle_{A_1} - \langle A_1 E \rangle_{B_0} \leq 1, \quad (4)$$

$$\langle A_1 B_1 \rangle_E - \langle B_1 E \rangle_{A_1} + \langle A_1 E \rangle_{B_1} \leq 1, \quad (5)$$

$$-\langle A_0 B_1 \rangle_E + \langle B_1 E \rangle_{A_0} + \langle A_0 E \rangle_{B_1} \leq 1. \quad (6)$$

W przypadku korelacji niesygnalizujących mamy natomiast, że wartości średnie iloczynów (zwane dalej korelatorami) tych samych wielkości nie zależą od kontekstu, w których są mierzone ( $\langle XY \rangle_Z = \langle XY \rangle_{Z'}$ ). Sumując powyższe cztery nierówności w prosty sposób otrzymujemy relację monogamii dla nierówności CHSH postaci

$$CHSH_{AB} + 2\langle B_0 E \rangle \leq 4, \quad (7)$$

z  $CHSH_{AB}$  jako średnią wartością operatora CHSH, która to nierówność ogranicza korelacje otrzymywane w pomiarach dokonywanych przez 3 obserwatorów w dowolnych teoriach zgodnych z więzami niesygnalizowania. Natomiast w przypadku, gdy pewna rodzina rozkładów prawdopodobieństwa (zwana dalej układem) łamie relację monogamii, to z konieczności musiałaby zostać złamana relacja niesygnalizowania, tak iż korelatory mierzone w innych kontekstach miałyby inne wartości ( $\langle XY \rangle_Z \neq \langle XY \rangle_{Z'}$ ), co z kolei pozwala na przesyłanie informacji (od obserwatora wybierającego między pomiarami  $Z$  i  $Z'$  do obserwatorów mierzących korelacje  $X$  i  $Y$ ).

Przypuśćmy zatem, że relacja monogamii (7) łamana jest o pewną wartość  $\Delta$ . Wtedy, sumując nierówności (3)–(6)

$$\langle A_0E \rangle_{B_0} - \langle A_0E \rangle_{B_1} + \langle A_1E \rangle_{B_0} - \langle A_1E \rangle_{B_1} + \langle B_1E \rangle_{A_1} - \langle B_1E \rangle_{A_0} \geq \Delta, \quad (8)$$

okazuje się, że przynajmniej dla jednej pary korelatorów (przykładowo  $\langle A_0E \rangle_{B_0}$  i  $\langle A_0E \rangle_{B_1}$ ) ich wartości różnią się przynajmniej o  $\Delta/3$ . W takiej sytuacji, użytkownicy mierzący wielkości  $A_0$  i  $E$  otrzymują różne wartości korelatorów w zależności od tego, w jakim kontekście (przy jakim wyborze ustawienia pomiaru  $B$ ) zostały one zmierzone. Sygnalizowanie wyborem ustawienia pomiaru  $B_0/B_1$  ustanawia zatem (asymetryczny) binarny kanał informacyjny  $C_{B \rightarrow AE}$ , którego pojemność zależy od układu, na którym dokonywane są pomiary. Schemat ten pozwala zatem na ilościowe określenie komunikacyjnej mocy układów łamiących relację monogamii w oparciu o koncepcję pojemności klasycznych kanałów.

Zauważmy przy tym, że warunek (8) nie określa jednoznacznie która para korelatorów odpowiada za łamanie relacji monogamii, co w praktyce oznacza, że sygnalizowanie potencjalnie może odbywać się również w innych schematach niż  $B \rightarrow AE$ . Ponadto zauważmy, że układ łamiący relację monogamii w istocie może również przejawiać sygnalizowanie w schemacie od jednego bądź pary obserwatorów do innego. Dla prostoty rozważań w dalszej analizie skupiamy się na układach ze znikającymi wartościami średnimi poszczególnych obserwacji, które wykluczają możliwość takiego właśnie schematu sygnalizowania. Należy przy tym zaznaczyć, że dla każdego układu łamiącego relację monogamii (7) o określonej wartości  $\Delta$  istnieje układ ze znikającymi wartościami średnimi pojedynczych obserwacji, który zwraca te same wartości korelatorów, oddając tym samym strukturę sygnalizowania, która w dalszej mierze pozwala na scharakteryzowanie układu pod kątem jego komunikacyjnej mocy.

Celem ilościowego określenia komunikacyjnej mocy układu sygnalizującego musimy zatem wziąć pod uwagę możliwość sygnalizowania we wszystkich schematach, które wynikają z (8), mianowicie  $B \rightarrow A_0E$ ,  $B \rightarrow A_1E$  oraz  $A \rightarrow B_1E$ , z którymi stowarzyszymy (asymetryczne) kanały o pojemnościach odpowiednio  $C_{B \rightarrow A_0E}$ ,  $C_{B \rightarrow A_1E}$  i  $C_{A \rightarrow B_1E}$  zależnymi od wartości związanych z nimi korelatorów. Moc komunikacyjną sygnalizującego układu definiujemy zatem przez minimalną pojemność kanału optymalnego schematu sygnalizowania dla układu łamiącego relację monogamii:

$$C_\Delta = \min_{\mathcal{P}_\Delta} \max \{ C_{B \rightarrow A_0E}, C_{B \rightarrow A_1E}, C_{A \rightarrow B_1E} \}, \quad (9)$$

gdzie  $\mathcal{P}_\Delta$  określa przestrzeń wszystkich układów łamiących relację monogamii o zadanej wartości  $\Delta$ . W pracy pokazujemy, że optymalizacja po przestrzeni układów sygnalizujących  $\mathcal{P}_\Delta$  może zostać zastąpiona przez optymalizację po wielokomórce  $\mathcal{Q}_\Delta$ , która jest wyznaczona przez nierówności

$$\langle A_0E \rangle_{B_0} - \langle A_0E \rangle_{B_1} + \langle A_1E \rangle_{B_0} - \langle A_1E \rangle_{B_1} + \langle B_1E \rangle_{A_1} - \langle B_1E \rangle_{A_0} \geq \Delta, \quad (10)$$

$$\langle A_0E \rangle_{B_0} + \langle A_0E \rangle_{B_1} + \langle A_1E \rangle_{B_0} - \langle A_1E \rangle_{B_1} - \langle B_1E \rangle_{A_1} - \langle B_1E \rangle_{A_0} \geq \Delta, \quad (11)$$

$$\langle A_0E \rangle_{B_0} - \langle A_0E \rangle_{B_1} + \langle A_1E \rangle_{B_0} + \langle A_1E \rangle_{B_1} + \langle B_1E \rangle_{A_1} + \langle B_1E \rangle_{A_0} \geq \Delta, \quad (12)$$

$$\langle A_0E \rangle_{B_0} + \langle A_0E \rangle_{B_1} + \langle A_1E \rangle_{B_0} + \langle A_1E \rangle_{B_1} - \langle B_1E \rangle_{A_1} + \langle B_1E \rangle_{A_0} \geq \Delta, \quad (13)$$

wynikające z (2) dla określonych zestawów obserwacji, oraz dodatkowo trywialnych warunków postaci  $-1 \leq \langle XY \rangle_z \leq 1$ .

Naturalnie, w sytuacji gdy relacja monogamii jest spełniona,  $\Delta = 0$  oraz  $C_0 = 0$ . Wartości komunikacyjnej mocy układów sygnalizujących dla  $\Delta > 0$  uzyskane z pomocą optymalizacji numerycznej przedstawia Rys.1. Dla przypadku maksymalnego łamania relacji monogamii  $\Delta = 2$  optymalizacji dokonaliśmy z wykorzystaniem technik analitycznych uzyskując wartość (po zaokrągleniu)  $C_2 = 0,158$ . Ponadto, dla dowolnej wartości  $\Delta$  znajdujemy układ (rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa), który osiąga wartość komunikacyjnej siły wyznaczoną przez

$C_\Delta$ :

$$p(A_i B_j E) = \frac{1}{4} \left[ 1 + A_i E \left( \frac{\Delta}{2} \delta_{j,0} + x \delta_{j,1} \right) \right] (\delta_{ij,0} \delta_{A_i B_j, 0} + \delta_{ij,1} \delta_{A_i B_j, -1}), \quad (14)$$

gdzie  $\delta_{m,n}$  jest deltą Kroneckera, a  $x$  jest parametrem spełniającym równanie

$$C((1 + \Delta/2)/2, (1 + x)/2) = C((1 + x)/2, (1 - x)/2), \quad (15)$$

gdzie  $C(q, r)$  jest pojemnością (asymetrycznego) kanału binarnego.

W pracy przedstawiamy również uogólnienie problemu na relację monogamii dla łańcuchowej nierówności Bella, gdzie każdy z dwójga obserwatorów (Alek i Bolek) może dokonywać pomiarów  $M$  dychotomicznych obserwabl. Również i w tym przypadku z nierówności postaci

$$\langle A_{i+j} B_i \rangle_E - (-1)^j \langle B_i E \rangle_{A_{i+j}} + (-1)^j \langle A_{i+j} E \rangle_{B_i} \leq 1, \quad (16)$$

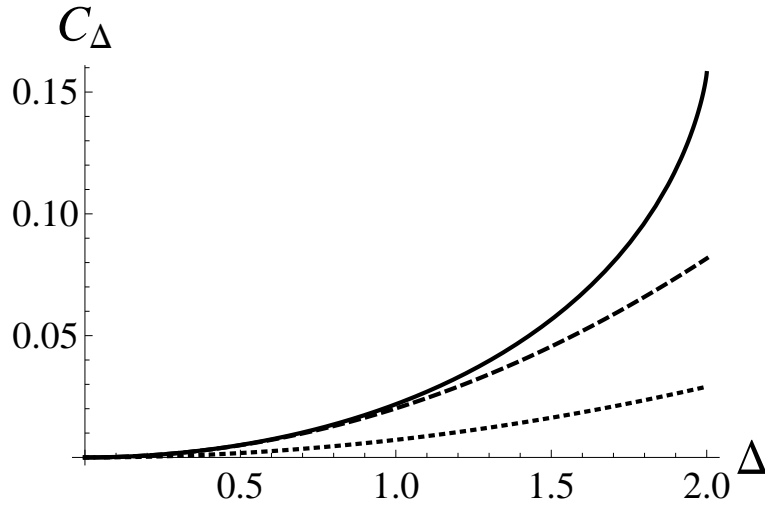
gdzie  $i = 1, \dots, M-1$  i  $j = 0, 1$  w prosty sposób otrzymujemy relację monogamii dla łańcuchowej nierówności Bella [R20]

$$|I_{AB}^M| + 2|\langle B_0 E \rangle| \leq 2M. \quad (17)$$

Podobnie i tutaj, łamanie relacji monogamii pociąga za sobą możliwość sygnalizowania w pewnym schemacie od jednego obserwatora do pary obserwatorów, przez co dany układ posiada niezerową komunikacyjną moc. Dalsza analiza pozwala na znalezienie dolnego ograniczenia komunikacyjnej mocy postaci

$$C_\Delta^M \geq 1 - H((1 + \frac{\Delta}{4M-2})/2), \quad (18)$$

(gdzie  $H$  określa wartość entropii binarnej), które dla porównania zostało również przedstawione na Rys.1.



Rysunek 1: Moc komunikacyjna  $C_\Delta$  sygnalizującego układu łamiącego relację monogamii (7) o wartość  $\Delta$  (linia ciągła). Dla porównania, dolne ograniczenie na moc komunikacyjną  $C_\Delta^M$  sygnalizującego układu łamiącego relację monogamii dla łańcuchowej nierówności Bella dla  $M = 2$  (linia przerywana) oraz  $M = 3$  (linia kropkowana).

#### 4.3.4 Kompromis między zaburzeniem a uzyskiwaną informacją jako efekt więzi niesygnalizowania oraz stopnia korelacji układu wielocząstkowego

W pracy [H2] otrzymujemy zasadę nieoznaczoności pomiarowej wyrażonej w formie kompromisu między zaburzeniem a uzyskiwaną informacją bazując na dwóch założeniach w postaci zasady niesygnalizowania oraz łamania nierówności Bella. Rozważamy scenariusz, w którym dwoje przestrzennie rozdzielonych użytkowników (Alek i Bolek) dysponują układem fizycznym przejawiającym nielokalność Bella, na którym dokonują następujących po sobie pomiarów obserwabli na swoich podukładach. Zauważmy, że w sytuacji, w której Bolek każdorazowo na swoim podukładzie dokonywałby pomiaru nie jednej obserwabli, a dwóch następujących po sobie niekompatybilnych obserwabli, drugi pomiar dokonywany będzie na układzie zaburzonym, a zatem w ogólności statystyki wyników Alka i Bolka nie gwarantują zachowania nielokalności korelacji.

Celem ilościowego określenia zaburzenia na skutek pomiaru jednej z obserwabli rozważamy równoważny scenariusz pomiarowy: zakładamy, że podukład Bolka jest ściśle skorelowany z dodatkowym podukładem, na którym trzeci użytkownik (Czesiek) wykonuje pomiar jednej obserwabli, odpowiadającej obserwabli Bolka, na której w pierwszej kolejności miałby on dokonywać pomiaru łagodnego. W ogólności rozważamy zatem układ trójcząstkowy, w którym każda z osób dokonuje tzw. pomiarów ostrych dających pełną informację o wartości zmiennych opisujących układ. Oznaczmy zatem rozkład prawdopodobieństwa wyników Alka i Bolka przez  $p(a, b|A_x, B_y)$  oraz rozkład prawdopodobieństwa wyników układu trójcząstkowego przez  $\tilde{p}(a, b, b_1^s|A_x, B_y, B_1^s)$ , gdzie  $b_1^s$  jest wynikiem pomiaru obserwabli Czeška, który odpowiada łagodnemu pomiarowi obserwabli  $B_1$ , przy czym naturalnie  $\tilde{p}(a, b|A_x, B_y, B_1^s) = \sum_{b_1^s} \tilde{p}(a, b, b_1^s|A_x, B_y, B_1^s)$ . W tym schemacie wymagamy, aby pomiar Czeška nie zaburzał statystyk wyników Bolka warunkowanych jakimikolwiek ustawieniami pomiarowymi i wynikami pomiarów Alka (zasada niesygnalizowania)

$$p(b_1|B_1, a, A_x) = \tilde{p}(b_1|B_1, B_1^s, a, A_x), \quad \text{dla wszystkich } a, x, \quad (19)$$

jak również, aby wynik pomiaru Czeška był skorelowany z wynikiem pomiaru obserwabli Bolka  $B_1$

$$\tilde{p}(b_1^s = i|b_1 = j, B_1, B_1^s, a, A_x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \epsilon & \text{dla } i = j, \\ \frac{1}{2} - \epsilon & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \quad (20)$$

gdzie parametr  $\epsilon$  określa zysk informacyjny o wartości zmiennej  $B_1$ .

Chcemy teraz określić jak bardzo pomiar łagodny obserwabli  $B_1$  (u nas jest nim ostry pomiar obserwabli  $B_1^s$  skorelowanej z  $B_1$ ) zaburza stan całego układu. Naturalną miarą zaburzenia jest statystyczna odległość między rozkładem wyników uzyskiwanych przy pomiarze obserwabli  $B_y \neq B_1$ , tj. przed pomiarem łagodnym  $p(b|B_y, a, A_x)$ , oraz rozkładem wyników uzyskiwanych po tym pomiarze  $\tilde{p}(b|B_y, B_1^s, a, A_x)$ , którą określamy przez

$$D_{a,x}(B_y) = \sum_b |p(b|B_y, a, A_x) - \tilde{p}(b|B_y, B_1^s, a, A_x)|. \quad (21)$$

W pracy rozpatrujemy całkowite zaburzenie  $\mathcal{D}$  wyrażone przez wartości zaburzenia statystyk Bolka uśrednione po wszystkich ustawieniach pomiarowych i wynikach Alka postaci

$$\mathcal{D} = \sum_{a,x} p(A_x)p(a|A_x) \sum_{y \neq 1} D_{a,x}(B_y). \quad (22)$$

Jak wspomnieliśmy we wstępie, wartość zaburzenia powodowanego pomiarem związana jest ze zmianą wartości korelacji nielokalnych. Ściślej, pokazujemy, że zachodzi relacja

$$n\mathcal{D} \geq |\beta(p) - \beta(\tilde{p})|, \quad (23)$$

gdzie  $n$  określa ilość ustawień pomiarowych Alka, a parametr  $\beta$  określa wartość oczekiwaną operatora Bella liczoną z uwzględnieniem odpowiednich statystyk  $p$  oraz  $\tilde{p}$ .

Należy tutaj zwrócić uwagę, że wybrane nierówności Bella w ogólności nie uwzględniają wszystkich obserwabli, których pomiaru może dokonać Bolek, w których to przypadkach powyższa relacja staje się pusta. Celem określenia jak bardzo pomiar obserwabli  $B_1$  może prowadzić do zaburzenia w odniesieniu do określonej nierówności Bella, wprowadzamy wielkość zwaną istotnością  $w(B_1)$ , określaną jako różnicę maksymalnej wartości oczekiwanej operatora Bella dla układów niesygnalizujących, a odpowiednią wartością w przypadku, gdy zmienna  $B_1$  jest deterministyczna

$$w = \beta^{\max} - \beta_1^{\max}, \quad (24)$$

a następnie dowodzimy, że zachodzi relacja monogamii korelacji postaci

$$\beta + w\langle B_1^g B_1 \rangle \leq \beta^{\max}. \quad (25)$$

W dalszej kolejności, wyrażając wartość informacji uzyskanej w wyniku pomiaru przez  $\mathcal{I} = \langle B_1^g B_1 \rangle = 2\epsilon$  oraz poziom nielokalności przez  $\mathcal{L} = \beta^{\max} - \beta$ , uzyskujemy zasadę nieoznaczoności pomiarowej w postaci kompromisu pomiędzy ilością informacji uzyskanej przy pomiarze, a wielkością zaburzenia, powodowanego aktem pomiaru

$$n\mathcal{D} \geq w\mathcal{I} - \mathcal{L}, \quad (26)$$

co stanowi główny wynik pracy.

Warto zastosować tak określoną relację nieoznaczoności dla dobrze poznanych schematów pomiarowych. W pierwszej kolejności rozpatrujemy zatem schemat pomiarowy CHSH, do którego odnosimy odpowiednie wartości charakteryzujące poziom nielokalności  $\mathcal{L}$ . Uzyskujemy dzięki temu relację nieoznaczoności w postaci liniowego więzu stanowiącego dolne ograniczenie na wartość zaburzenia postaci

$$\mathcal{D} \geq 2\epsilon - \frac{1}{2}(4 - \beta_{\text{CHSH}}). \quad (27)$$

Dolne ograniczenie na wartość zaburzenia przedstawiamy na Rys.2, podkreślając jednocześnie, że owo nietrywialne ograniczenie uzyskane jest niezależnie od formalizmu mechaniki kwantowej. Otrzymany wynik porównujemy następnie z wartościami otrzymanymi w ramach mechaniki kwantowej. W tym przypadku przyjmujemy, że za pomiar ostry obserwabli  $B_1$  odpowiada pomiar zdefiniowany przez operatory rzutowe  $\hat{P}_0$  i  $\hat{P}_1$ , zaś pomiar łagodny realizowany jest przez pomiar określony operatorami Krausa  $\hat{E}_0 = \sqrt{\frac{1}{2} + \epsilon}\hat{P}_0 + \sqrt{\frac{1}{2} - \epsilon}\hat{P}_1$  i  $\hat{E}_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \epsilon}\hat{P}_0 + \sqrt{\frac{1}{2} + \epsilon}\hat{P}_1$ . Statystyki  $\tilde{p}(b|b_1^g, B_y, B_1^g)$  otrzymywane są w wyniku pomiarów ostrych dokonywanych na odpowiednich stanach warunkowych dla wyników otrzymanych w poprzedzającym go pomiarze łagodnym. Pokazujemy, że formalizm kwantowy spełnia warunki (19)–(20), a tym samym odpowiada przedstawionemu przez nas schematowi, który prowadzi do relacji nieoznaczoności. Jak się okazuje, w przypadku pomiaru łagodnego dającego pełną wiedzę o wartości zmiennej ( $\epsilon = \frac{1}{2}$ ) uzyskujemy ścisłą zgodność z wynikiem otrzymanym w ramach formalizmu kwantowego (Rys.2).

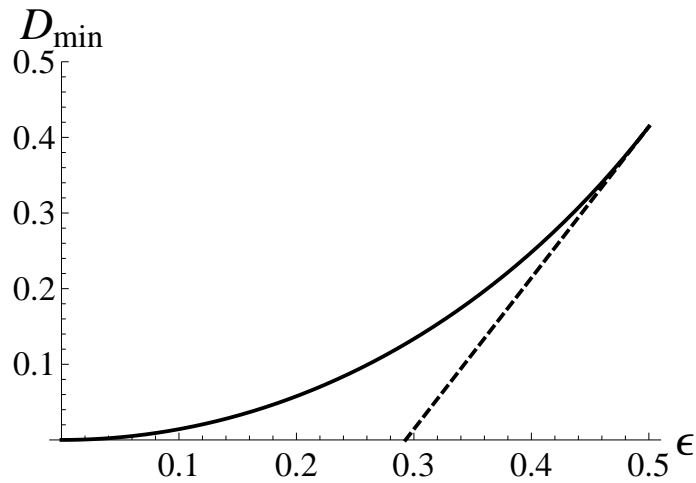
W pracy rozważamy również uogólnienie powyższego schematu w odniesieniu do łańcuchowej nierówności Bella, w którym zarówno Alek jak i Bolek mogą dokonywać pomiarów w  $n$  różnych bazach. W tym przypadku relacja między zaburzeniem a uzyskiwaną informacją wyraża się jako

$$\mathcal{D} \geq \frac{4}{n}\epsilon - \frac{1}{n}(2n - \beta_{\text{chain}}), \quad (28)$$

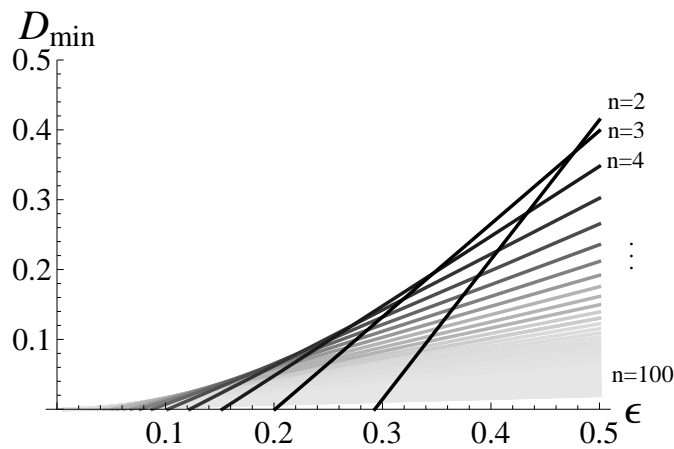
co przedstawione zostało na Rys.3.

Zauważamy, że uzyskana zasada nieoznaczoności dla korelacji niesygnalizujących w przypadku scenariusza CHSH posiada tę cechę, że dolne ograniczenie na zaburzenie jest trywialne

(tj. równe 0) dopóty, dopóki uzyskiwana informacja nie osiąga odpowiedniej wartości granicznej  $\epsilon_{th} = 0,293$ . Rozważenie większej ilości pomiarów (jak w przypadku łańcuchowych nierówności Bella, gdzie Alek i Bolek mogą dokonywać pomiarów wybieranych spośród większej liczby baz) pozwala na zmniejszenie granicznej wartości  $\epsilon_{th}$  dowolnie blisko 0 (por. Rys.3).



Rysunek 2: Dolne ograniczenie na wartość zaburzenia otrzymane z zasady niesygnalizowania dla układu łamiącego nierówność CHSH do maksymalnej wartości kwantowej  $\beta_{\text{CHSH}} = 2\sqrt{2}$  (linia przerywana). Dla porównania przedstawiono wartość zaburzenia powodowanego aktem łagodnego pomiaru otrzymanego w ramach normalizmu mechaniki kwantowej (linia ciągła).



Rysunek 3: Dolne ograniczenia na wartość zaburzenia otrzymane z zasady niesygnalizowania dla układu łamiącego łańcuchową nierówność Bella do maksymalnej wartości kwantowej  $\beta_{\text{chain}} = 2n \cos \frac{\pi}{2n}$  dla różnych wartości możliwych ustawień pomiarowych.

#### 4.3.5 Kooperacyjny zysk informacyjny jako efekt współzależności układu wielocząstkowego

Celem wyprowadzenia miary współzależności [H3] rozpatrujemy układ współdzielony przez 3 osoby (Alka, Bolka i Czeška), które dokonują pomiarów swoich odpowiednich obserwabli ( $A$ ,  $B$  i  $C$ ). Zmienna  $A$  jest statystycznie niezależna od wyników zmiennej  $B$ , jeśli rozkład prawdopodobieństwa tych zmiennych spełnia  $p(A|B) = p(A)$ . Alternatywnie, statystyczną niezależność dwóch zmiennych wyrazić można w języku entropii Shannona:  $H(A|B) = H(A)$ , przez co statystyczną zależność między dwiema zmiennymi wyrazić można poprzez wza-

jemną informację  $I(A : B) = H(A) - H(A|B)$ . W przypadku 3 zmiennych, jedna z nich może być niezależna od wszystkich pozostałych, np.  $p(A|BC) = p(A)$ , jak również może być warunkowo niezależna tylko od jednej zmiennej, np.  $p(A|BC) = p(A|B)$ . Tym samym statystyczną zależność pomiędzy jedną zmienną a pozostałymi wyraża wzajemna informacja  $I(A : BC)$ , z kolei warunkowa zależność drugiego przypadku wyrażana jest przez warunkową wzajemną informację  $I(A : C|B)$ . Zauważmy, że warunkowa wzajemna informacja  $I(A : C|B) = I(A : BC) - I(A : B)$  wyraża informacyjny zysk ze współpracy, jaką Bolek może uzyskać współpracując z Cześkiem chcąc poznać wartość zmiennej Alka. Naturalnym jest zatem zdefiniowanie wielkości, która dla 3 zmiennych losowych o łącznym rozkładzie prawdopodobieństwa  $p(ABC)$  wyraża najmniejszy możliwy informacyjny zysk wynikający ze współpracy pomiędzy dowolnymi osobami względem trzeciej z nich, postaci

$$\mathcal{D}_3 = \min[I(A : C|B), I(A : B|C), I(C : B|A)]. \quad (29)$$

Tak zdefiniowana przez nas wielkość istotnie wyraża współzależność między zmiennymi  $A$ ,  $B$  i  $C$ : miara osiąga wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka zmienna, dla której istnieje podzbiór pozostałych osób posiadających pewną wiedzę o tej zmiennej, której nie można zwiększyć współpracując z innymi osobami.

Bardzo dobrą ilustracją tej idei jest rozważenie dwóch rozkładów prawdopodobieństwa trzech zmiennych binarnych:  $p(000) = p(111) = \frac{1}{2}$  oraz  $p(000) = p(011) = p(101) = p(110) = \frac{1}{4}$ , których zmienne w każdym przypadku są ściśle skorelowane. Zauważmy, że dla pierwszego rozkładu znajomość wartości pierwszej zmiennej automatycznie pociąga za sobą pełną wiedzę o wartości trzeciej zmiennej, toteż informacyjny zysk ze współpracy pierwszej i drugiej osoby wynosi zero. Dla kontrastu, w przypadku drugiego rozkładu każda ze zmiennych niezależna od jakiegokolwiek innej, z kolei współpraca pomiędzy dwoma osobami daje pełną wiedzę o wartości trzeciej zmiennej, toteż współzależność osiąga maksymalną wartość 1.

W przypadku układów wielocząstkowych z większą liczbą użytkowników zauważamy, że zmianie podlega nie tylko schemat możliwych kooperacji pomiędzy podzbiorem uczestników (np.  $I(X_1 : X_2X_3X_4) - I(X_1 : X_2X_3)$ ), ale również ilość zmiennych, których poznanie wartości jest celem współpracujących osób (np.  $I(X_1X_2 : X_3X_4) - I(X_1X_2 : X_3)$ ). Współzależność układu wielocząstkowego wyrażona przez wartość zysku informacyjnego w najmniej optymalnym schemacie wymaga zatem zoptymalizowania po wszystkich możliwych schematach współpracy pomiędzy użytkownikami. Korzystając z reguły łańcuchowej dla wzajemnej informacji pokazujemy, że minimalna wartość zysku informacyjnego dla określonego rozkładu prawdopodobieństwa zadana jest przez wzajemną informację pary zmiennych warunkowanych pozostałymi, dzięki czemu współzależność  $N$  zmiennych wyrażamy przez

$$\mathcal{D}_N = \min I(X_1 : X_2|X_3 \dots X_N), \quad (30)$$

gdzie minimum wyznacza się po wszystkich permutacjach  $N$  zmiennych (podukładów). Niezerowa wartość współzależności  $\mathcal{D}_N$  dla danego rozkładu zmiennych oznacza zatem, że jakikolwiek schemat współpracy między użytkownikami prowadzi do zwiększenia wiedzy o stanie dowolnego innego podzbioru zmiennych.

Dla układów kwantowych  $N$  cząstek w stanie opisanym macierzą gęstości  $\rho$  względną informację wyrażamy w formie entropii von Neumanna otrzymując

$$\mathcal{D}_N(\rho) = \min_{i,j}[S(\text{Tr}_i\rho) + S(\text{Tr}_j\rho) - S(\text{Tr}_{ij}\rho) - S(\rho)], \quad (31)$$

gdzie minimum wyznacza się po wszystkich wyborach śladów częściowych podukładów  $i$  i  $j$ . Zauważamy przy tym, że w kontekście trójcząstkowych stanów kwantowych mamy np.  $I(X_1 : X_3|X_2) = S(X_1|X_2) + S(X_3|X_2) - S(X_1X_3|X_2)$ , gdzie dla prostoty stan  $i$ -tego układu oznaczamy przez  $X_i$ . Wiedząc, że warunkowa entropia  $S(X_1|X_2)$  określa koszt scalania stanów kwantowych  $X_1$  z  $X_2$  [R72], kwantową warunkową informację wzajemną można interpretować jako dodatkowy koszt scalania stanów pojedynczo ( $X_1$  z  $X_2$  i  $X_3$  z  $X_2$ ) zamiast dwóch stanów



jednocześnie ( $X_1 X_3$  z  $X_2$ ). Tym samym wartość współzależności  $\mathcal{D}_N(\rho)$  określa minimalny dodatkowy koszt takiego procesu.

Dla nowo zdefiniowanej wielkości, w pracy [H3] określamy jej najważniejsze własności. Współzależność osiąga minimalną wartość równą 0 dla układów, których pewne podukłady są niezależne od pozostałych, jak również dla tych układów, dla których współpraca pomiędzy dowolnymi podzbiorami podukładów nie prowadzi do zwiększenia wiedzy o stanie pozostałych podukładów, co zostało wspomniane wcześniej. Wartość  $\mathcal{D}_N$  dla klasycznych rozkładów prawdopodobieństwa jest ograniczona z góry przez 1, która to wartość jest osiągana przez, przykładowo, jednorodny rozkład trzech binarnych zmiennych, których suma wartości jest parzysta. Wartość  $\mathcal{D}_N(\rho)$  dla czystych stanów kwantowych również jest ograniczona z góry przez 1, która jest osiągana przez klasę stanów GHZ. Dodatkowo, pokazujemy, że dla kwantowych stanów czystych współzależność jest określona przez minimalną wartość informacji wzajemnej dla dwucząstkowej redukcji  $N$ -cząstkowego stanu czystego  $|\Psi\rangle$

$$\mathcal{D}_N(|\Psi\rangle) = \min_{i,j}[S(\rho_i) + S(\rho_j) - S(\rho_{ij})]. \quad (32)$$

W odróżnieniu od klasycznych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych, wartość  $\mathcal{D}_N(\rho)$  jest ograniczona z góry przez 2, która to wartość (dla parzystej liczby  $N$  kubitów) jest osiągana przez mieszane stany  $k$ -jednorodne (z  $k = N - 1$ ) postaci

$$\rho_{\max} = \frac{1}{2^N} \left( \sigma_0^{\otimes N} + (-1)^{N/2} \sum_{j=1}^3 \sigma_j^{\otimes N} \right), \quad (33)$$

będące użytecznymi zasobami w protokołach komunikacji wielocząstkowej [R73]. Wykazaliśmy, że  $k$ -jednorodne stany cząstek o wymiarze przestrzeni Hilberta  $d$  z  $k = N - 1$  (szerzej omówione w pracy [H5]) są unikalną klasą stanów kwantowych, które osiągają górne ograniczenie  $\mathcal{D}_N(\rho)$ .

Rozważyliśmy miarę współzależności  $\mathcal{D}_N(\rho)$  jako potencjalną miarę wielocząstkowych korelacji. W pracy [R46] podano trzy postulaty, które powinny być spełniane przez miary bądź indykatory prawdziwie wielocząstkowych korelacji (względnie prawdziwie wielocząstkowego splątania). Dowiedliśmy, że miara współzależności spełnia pierwszy postulat mówiący, iż jeśli do układu  $N$ -cząstkowego, dla którego  $\mathcal{D}_N = 0$  dodamy nieskorelowaną cząstkę, to dla uzyskanego układu  $(N + 1)$ -cząstkowego miara współzależności wynosi  $\mathcal{D}_{N+1} = 0$ . Następnie dowiedliśmy, że miara współzależności spełnia drugi postulat mówiący, iż jeśli w obrębie układu  $N$ -cząstkowego, dla którego  $\mathcal{D}_N = 0$  jedna cząstka zostanie podzielona na dwa podukłady, to dla wynikowego układu  $(N + 1)$ -cząstkowego miara współzależności wynosi  $\mathcal{D}_{N+1} = 0$ . Z kolei trzeci postulat wymaga, by miara prawdziwie wielocząstkowych korelacji nie rosła pod wpływem lokalnych operacji (choć niekiedy warunek ten nie jest w praktyce wymagany [R74, R75, R76]). Miara współzależności w ogólności nie jest jednak monotoniczna ze względu na lokalne operacje, niemniej wykazaliśmy, że spełniona jest nierówność ograniczająca wzrost wartości współzależności po zastosowaniu lokalnych operacji

$$\overline{\mathcal{D}}_N \leq \mathcal{D}_N + I(X_1 X_2 : X_3 \dots X_N) - I(X_1 X_2 : \overline{X}_3 \dots \overline{X}_N), \quad (34)$$

gdzie  $X_1$  i  $X_2$  określają wyszczególniony wybór podukładów minimalizujących  $\mathcal{D}_N$  (porównaj z definicją (30)).

Zwracamy uwagę, że miara współzależności  $\mathcal{D}_N$  charakteryzuje korelacje międzycząstkowe innego typu niż prawdziwie wielocząstkowe splątanie, czy wielocząstkowe korelacje wyznaczone przez  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji. W pracy [H4] pokazujemy protokół, za pomocą którego z  $N$ -cząstkowych stanów posiadających niezerowe  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji utworzyć można nietrywialne  $N$ -cząstkowe stany ze znikającymi  $N$ -cząstkowymi elementami tensora korelacji. Z jego pomocą pokazujemy, że mieszanina  $N$ -kubitowych stanów Dicke'go odpowiednio z 1 i  $N - 1$  wzbudzeniami wykazuje niezerową wartość współzależności

$\mathcal{D}_N$ , pomimo że stan ten posiada znikające  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji, czym wykazujemy, że  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji nie odpowiadają za  $N$ -cząstkową współzależność.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, układy wielocząstkowe w stanie klasycznie skorelowanym wykazują  $\mathcal{D}_N \leq 1$ . Płyńie stąd oczywisty wniosek, że układy, dla których  $\mathcal{D}_N > 1$  wykazują istnienie korelacji kwantowych. Istotnie, z definicji współzależności jako różnicy dwóch wzajemnych informacji  $\mathcal{D}_N = I(X_1 : X_2 X_3 \dots X_N) - I(X_1 : X_3 \dots X_N)$  widzimy, że skoro druga z nich jest nieujemna, to wartość pierwszej jest większa od jedności, co z wykorzystaniem warunkowej entropii można zapisać jako

$$S_{X_1|X_2 X_3 \dots X_N}(\rho) < -1 + S(\rho_1). \quad (35)$$

Dla podukładów o równej wymiarowości  $S(\rho_1) \leq 1$ , skąd warunkowa entropia przyjmuje wartość ujemną, co jest cechą wyłącznie stanów splątanych [R77], przy czym ów stan splątany, niekoniecznie musi być prawdziwie wielocząstkowo splątany. Uwidacznia się to szczególnie w przypadku stanów maksymalizujących miarę  $\rho_{\max}$  (33) będących mieszaninami skorelowanych stanów Bella. Rozważamy również miary współzależności  $k$ -podukładów w obrębie stanów  $N$ -cząstkowych. W tym aspekcie, jeśli miara  $\mathcal{D}_k > 1$ , to każdy  $k$ -cząstkowy układ jest splątany, czego przykładem jest 6-kubitowy stan absolutnie maksymalnie splątany, dla którego wszystkie 4-cząstkowe podukłady są splątane oraz  $\mathcal{D}_4(\text{AME}(6, 2)) = 2$ .

Badamy również przypadek odwrotny, mianowicie rozważamy, czy istnieją stany prawdziwie wielocząstkowo splątane, które wykazują miarę współzależności  $\mathcal{D}_N = 0$ . Pokazujemy, że przykładem są tu  $N$ -cząstkowe stany klastrowe [R78]. Istotnie, dla czystych stanów klastrowych wszystkie zredukowane jednocząstkowe podukłady są w stanie maksymalnie mieszanym, a dodatkowo istnieje przynajmniej jedna para cząstek, których zredukowany stan również jest w stanie maksymalnie mieszanym, w związku z czym, przez wzgląd na (31), otrzymujemy  $\mathcal{D}_N = 0$  dla stanu prawdziwie wielocząstkowo splątanego. Widzimy zatem, że informacja o stanie pewnego podukładu nie może być zwiększona w wyniku kooperacji innych podukładów, co tłumaczy również niemożność wykorzystania tych stanów w aspekcie zadań opartych o współdzielenie sekretów [R79, R80]. Podobnie zatem jak w przypadku  $N$ -cząstkowych elementów tensora korelacji widzimy, że współzależność cząstek ilościowana miarą  $\mathcal{D}_N$  jest jakościowo różna od prawdziwie wielocząstkowego splątania.

Rozpatrując powyższy przykład zauważamy, że miara współzależności  $\mathcal{D}_N$  znajduje zastosowanie w określaniu użyteczności zasobów pod kątem wykorzystania ich w protokołach związanych ze współdzieleniem sekretów. W naszym przypadku, w którym miara określona jest przez minimum po permutacjach użytkowników, zasób może być wykorzystany przez któregośkolwiek uczestnika. W prototypowym przykładzie wykorzystującym trzy zmienne losowe opisane łącznym rozkładem prawdopodobieństwa  $p(000) = p(011) = p(101) = p(110) = \frac{1}{4}$ , sekretem jest wynik zmiennej jednego użytkownika, którego wartość jest niedostępna dla każdego z pozostałych użytkowników z osobna. Miara współzależności  $\mathcal{D}_N$  w sposób naturalny określa zatem możliwość wykorzystania powyższego układu w formie użytecznego zasobu, a dodatkowo sekret może być wytworzony przez któregośkolwiek z użytkowników. W kontekście współdzielenia sekretu wykorzystującego stany kwantowe [R47] proponujemy protokół wykorzystujący stany  $\rho_{\max}$  (33) osiągające maksymalną wartość miary współzależności  $\mathcal{D}_N$ . Dodatkowo, dla dowolnego stanu kwantowego wyprowadzamy nierówność, która określa minimalną wydajność kwantowego współdzielenia sekretu wyrażoną przez wartość miary współzależności postaci

$$\mathcal{R} \geq \mathcal{D}_N(\rho) - 1, \quad (36)$$

co wskazuje, że dla dowolnych układów, których stan określonych podukładów jest maksymalnie mieszanym, wydajność ta jest dodatnia. Dodatkowo wskazujemy, że w przypadku układów kwantowych, których stan podukładów jest klasycznie skorelowany (np. układ w stanie GHZ) minimalna wydajność jest ograniczona ściśle przez wartość  $\mathcal{D}_N$ .

### 4.3.6 Analiza relacji splątania kwantowego i tensora korelacji

W pierwszej kolejności rozważamy stan  $N$  kubitów w reprezentacji tensora korelacji

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N=0}^3 T_{\mu_1 \dots \mu_N} \sigma_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{\mu_N}, \quad (37)$$

gdzie współczynniki definiujące tensor zadane są przez jego elementy  $T_{\mu_1 \dots \mu_N} = \text{Tr}(\rho \sigma_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{\mu_N})$ . Konstrukcja stanu z zerującymi się  $N$ -cząstkowymi elementami tensora korelacji przedstawiona w [R54] opiera się na zaaplikowaniu odwzorowania zmieniającego znak macierzy Pauliego  $\mathcal{N} : \sigma_j \rightarrow -\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) dla wszystkich kubitów wyjściowego stanu  $\rho$ . Dla układu składającego się z nieparzystej liczby cząstek  $N$ , macierz gęstości po odwzorowaniu  $\bar{\rho}$  spełnia  $T_{j_1 \dots j_N}(\bar{\rho}) = -T_{j_1 \dots j_N}(\rho)$ . W tym przypadku równowagowa mieszanina tych stanów  $\rho_{nc} = \frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho})$  posiada zerujące się elementy tensora korelacji dla nieparzystej liczby cząstek.

W przypadku podukładów o wymiarowości większej niż 2, stan  $N$  kuditów w reprezentacji tensora korelacji wyrażony może być w bazie operatorów  $X^m Z^n$  ( $m, n = 0, 1, \dots, d-1$ ), z operatorami Hiesenberga-Weyla  $X$  i  $Z$ . Okazuje się, że proste uogólnienie odwzorowania  $\mathcal{N}$  dla przypadku kuditów  $\mathcal{N} : X^m Z^n \rightarrow \omega_d^m X^m Z^n, Z^n \rightarrow \omega_d^n Z^n$  z  $\omega_d = \exp(2\pi i/d)$  nie jest w ogólności odwzorowaniem dodatnim, co uniemożliwia konstrukcję stanów ze znikającymi elementami tensora korelacji analogiczną do przypadku kubitowego.

Alternatywnie, stan  $N$  kuditów w reprezentacji tensora korelacji wyrażony może być w bazie operatorów Gell-Manna stanowiących uogólnienie operatorów Pauliego

$$\begin{aligned} M_{j,k}^s &= \lambda_{j,k} + \lambda_{k,j} \quad \text{dla } 1 \leq j < k \leq d, \\ M_{j,k}^a &= -i(\lambda_{j,k} - \lambda_{k,j}) \quad \text{dla } 1 \leq j < k \leq d, \\ M_{j,k}^g &= \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left( \sum_{i=1}^l \lambda_{j,i} - l\lambda_{l+1,l+1} \right) \quad \text{dla } 1 \leq l \leq d-1, \end{aligned} \quad (38)$$

z  $\lambda_{j,k} = |j\rangle\langle k|$  w bazie standardowej. Numerując je kolejno, stan  $N$  kuditów w reprezentacji tensora korelacji zapisać można jako

$$\rho = \frac{1}{d^N} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_N=0}^{d^2-1} T_{\mu_1 \dots \mu_N} M_{\mu_1} \otimes \dots \otimes M_{\mu_N}. \quad (39)$$

Definiujemy odwzorowanie stanu  $d$ -wymiarowego układu kwantowego postaci

$$\mathcal{N}_d(\cdot) := \sum_a \frac{M_a}{\sqrt{d-1}} (\cdot)^* \frac{M_a^\dagger}{\sqrt{d-1}}, \quad (40)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich antysymetrycznych macierzach  $M_{j,k}^a$ . Łatwo pokazać, że odwzorowanie macierzy Gell-Manna daje

$$\mathcal{N}_d(M_0) = M_0, \quad (41)$$

$$\mathcal{N}_d(M_j) = -\frac{1}{d-1} M_j, \quad \text{dla } j \neq 0, \quad (42)$$

z kolei samo odwzorowanie jest odwzorowaniem dodatnim, odwzorowującym dowolną macierz gęstości stanu kuditów  $\rho$  w pół-dodatnio określoną macierz  $\bar{\rho}$ . Istotnie,  $\rho^*$  nie zmienia wartości własnych  $\rho$ , z kolei  $\sum_a \frac{M_a}{\sqrt{d-1}} (\cdot) \frac{M_a^\dagger}{\sqrt{d-1}}$  stanowi odwzorowanie POVM z operatorami Krausa zadanymi przez  $K_a = M_a / \sqrt{d-1}$ .

W przypadku układu złożonego  $N$ -kuditowego, stosując odwzorowanie (40) dla każdego kuditów otrzymujemy stan

$$\bar{\rho} = (\mathcal{N}_d \otimes \dots \otimes \mathcal{N}_d)(\rho), \quad (43)$$

którego współczynniki tensora korelacji  $\bar{T}_{j_1 \dots j_N}$  związane są ze współczynnikami tensora korelacji stanu wyjściowego (39) poprzez

$$\bar{T}_{j_1 \dots j_N} = \frac{(-1)^N}{(d-1)^N} T_{j_1 \dots j_N}. \quad (44)$$

Widzimy zatem, że dla nieparzystej ilości cząstek  $N$ , stan  $\bar{\rho}$  posiada przeskalowane  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji ze zmienionym znakiem względem stanu  $\rho$ . Umożliwia to konstrukcję stanu w postaci nierównowagowej mieszanki

$$\rho_{\text{nc}} = p \rho + (1-p) \bar{\rho}, \quad (45)$$

z  $p = \frac{1}{1+(d-1)^N}$  mającego tę własność, że wszystkie  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji stanu  $\rho_{\text{nc}}$  zerują się.

Celem ilustracji konstrukcji stanów ze znikającymi  $N$ -cząstkowymi elementami tensora korelacji możemy rozważyć przypadek stanu układu trzech kutritów

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1}{27} M_0 \otimes M_0 \otimes M_0 + \frac{1}{18} \sum_{\pi_{i00}} \sum_{i=1}^8 T_{i00} M_i \otimes M_0 \otimes M_0 \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\pi_{ij0}} \sum_{i,j=1}^8 T_{ij0} M_i \otimes M_j \otimes M_0 + \frac{1}{8} \sum_{i,j,k=1}^8 T_{ijk} M_i \otimes M_j \otimes M_k, \end{aligned} \quad (46)$$

gdzie  $\pi_{ijk}$  określa permutacje wskaźników  $ijk$ . Po odwzorowaniu  $\mathcal{N}$  stan  $\rho$  przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1}{27} M_0 \otimes M_0 \otimes M_0 + \frac{1}{18} \sum_{\pi_{i00}} \sum_{i=1}^8 T_{i00} M_i \otimes M_0 \otimes M_0 \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\pi_{ij0}} \sum_{i,j=1}^8 T_{ij0} M_i \otimes M_j \otimes M_0 + \frac{1}{8} \sum_{i,j,k=1}^8 T_{ijk} M_i \otimes M_j \otimes M_k, \end{aligned} \quad (47)$$

z kolei mieszanka stanów (45) zadaje stan postaci

$$\rho_{\text{nc}} = \frac{1}{27} M_0 \otimes M_0 \otimes M_0 + \frac{1}{18} \sum_{\pi_{i00}} \sum_{i=1}^8 T'_{i00} M_i \otimes M_0 \otimes M_0 + \frac{1}{12} \sum_{\pi_{ij0}} \sum_{i,j=1}^8 T'_{ij0} M_i \otimes M_j \otimes M_0, \quad (48)$$

którego elementy tensora korelacji określone są przez  $T'_{i00} = -\frac{1}{3} T_{i00}(\rho)$  oraz  $T'_{ij0} = \frac{1}{3} T_{ij0}(\rho)$  (analogicznie dla pozostałych permutacji indeksów).

W dalszej kolejności dowiedzimy, że istnieją stany prawdziwie wielocząstkowo splątane, których  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji zerują się. W tym celu rozważamy stan  $N = 3$  kutritów, który można otrzymać za pomocą przedstawionej powyżej konstrukcji ze stanu wyjściowego w postaci  $\rho = |D_{3,3}^1\rangle\langle D_{3,3}^1|$ , gdzie

$$|D_{3,3}^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (49)$$

Konstrukcja stanu  $\rho_{\text{nc}}(D_{3,3}^1)$  zapewnia znikanie 3-cząstkowych elementów tensora korelacji. Z drugiej strony, wyznaczając wartość wskaźnika splątania  $W$  przedstawionego w pracy [R81] znajdujemy, że dla rozważanego stanu wartość  $W(\rho_{\text{nc}}) = 0,0444$ , co wskazuje na istnienie prawdziwie wielocząstkowego splątania. Pokazaliśmy tym samym, że prawdziwie wielocząstkowe splątanie układu  $N$  kuditów nie może być charakteryzowane w oparciu o wyłącznie  $N$ -cząstkowe elementy tensora korelacji.

W następnym pracy [H5] analizujemy problem znajdowania stanów  $k$ -jednorodnych o największej czystości. W pierwszej kolejności zauważamy, że jeśli zdefiniujemy długość korelacji  $r$  podukładów układu w stanie  $\rho$  jako

$$M_r(\rho) = \sum_{\pi} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^3 T_{\pi(i_1 i_2 \dots i_r)}^2, \quad (50)$$

to własność  $k$ -jednorodności stanu  $N$ -cząstkowego wyrazić można w języku elementów tensora korelacji jako

$$M_r(\rho_N^k) = 0. \quad (51)$$

Mając na uwadze związek między całkowitą długością korelacji stanu i jego czystością

$$\sum_{r=1}^N M_r(\rho) = 2^N \text{Tr} \rho^2 - 1, \quad (52)$$

obserwujemy, że dla zadanej czystości stanu, własność  $k$ -jednorodności pociąga za sobą koncentrację istniejących korelacji, które występują wyłącznie w podukładach między większą ( $r > k$ ) liczbą cząstek. W konsekwencji tego można oczekiwać, że stany  $k$ -jednorodne o dużej czystości będą charakteryzować się silnymi nieklasycznymi własnościami, takimi jak prawdziwie wielocząstkowe splątanie, czy nielokalność Bella. Istotnie, jak wykazaliśmy w dalszej części pracy, wszystkie znalezione stany  $k$ -jednorodne o czystości nie mniejszej niż  $1/2$  są prawdziwie wielocząstkowo splątane, jak również wykazują wysokie prawdopodobieństwo łamania ograniczeń lokalnego realizmu [R82, R83].

W następnym kolejności przedstawiamy schemat konstrukcji stanów  $k$ -jednorodnych w oparciu o  $N$ -kubitowe macierze Pauliego postaci

$$G = \sigma_{i_1} \otimes \sigma_{i_2} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_N}, \quad (53)$$

gdzie  $i \in \{0, x, y, z\}$ . Niech dany jest zbiór  $N$ -kubitowych operatorów (nazywanych dalej generatorami)

$$\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_m\}, \quad (54)$$

spełniających własności: 1) komutacji,  $[G_i, G_j] = 0$  dla każdych  $i, j$ ; 2) niezależności,  $G_1^{i_1} \dots G_m^{i_m} \propto \mathbb{1}$  tylko dla  $i_1 = \dots = i_m = 0$  z  $i_j = \{0, 1\}$ ; oraz 3)  $k$ -jednorodności, tj. iloczyn generatorów  $G_1^{i_1} \dots G_m^{i_m}$  ( $i_j = \{0, 1\}$ ) jest iloczynem  $1$ -kubitowych macierzy Pauliego (53) z co najwyżej  $N - k - 1$  macierzami  $\sigma_0$ . Wtedy unormowana suma produktów generatorów

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^1 G_1^{j_1} \dots G_m^{j_m}, \quad (55)$$

reprezentuje macierz gęstości stanu  $k$ -jednorodnego. Fizyczność stanu (55) dowodzimy wskazując, że

$$\rho = \frac{1}{2^N} (\mathbb{1} + G_1)(\mathbb{1} + G_2) \dots (\mathbb{1} + G_m), \quad (56)$$

co pozwala pokazać, że wartości własne macierzy (55) przyjmują wartości  $0$ , lub  $2^{m-N}$ . Porównując natomiast (55) z (37) zauważamy, że skonstruowany w ten sposób stan  $\rho$  ma  $2^m$  elementów tensora korelacji o wartościach  $\pm 1$ . Przez wzgląd na (52) pozwala to również określić czystość stanu  $\rho$  na

$$\text{Tr} \rho^2 = \frac{1}{2^N} 2^m = 2^{m-N}. \quad (57)$$

Widzimy zatem, że czystość stanu bezpośrednio zależy od mocy zbioru generatorów  $\mathcal{G}$ , natomiast problem konstrukcji stanu  $k$ -jednorodnego sprowadza się do znalezienia możliwie

najliczniejszego zbioru generatorów  $\mathcal{G}$ . Naturalnie, w przypadku stanów  $k$ -jednorodnych z  $k = \lfloor N/2 \rfloor$  liczba generatorów wynosząca  $m = N$  prowadzi do konstrukcji stanów AME o czystości 1.

Niezależnie od przedstawionej powyżej konstrukcji stanów  $k$ -jednorodnych, w szczególnych przypadkach możliwe jest skonstruowanie stanu  $k$ -jednorodnego w przypadku, gdy dany jest stan  $(k-1)$ -jednorodny z  $k$  nieparzystym. Zauważamy, że wykorzystując wprowadzone wcześniej odwzorowanie (43) [H4], możliwe jest uzyskanie stanu ze znikającymi elementami tensora korelacji rzędu  $k$

$$\rho_N^k = \frac{1}{2}(\rho_N^{k-1} + \bar{\rho}_N^{k-1}), \quad (58)$$

dzięki czemu otrzymany stan będzie stanem  $k$ -jednorodnym. W tym przypadku jednak czystość otrzymanego stanu zostaje zredukowana o czynnik 2 (w przypadku stanu układu  $N$  kubitów) względem czystości wyjściowego stanu  $(k-1)$ -jednorodnego.

W dalszej kolejności prezentujemy przykładowe zbiory generatorów  $\mathcal{G}$ , które dla poszczególnych wartości liczby cząstek  $N$  i stopnia jednorodności  $k$  jednoznacznie wyznaczają odpowiednie stany  $k$ -jednorodne o największej czystości.

- $N$ -cząstkowe stany 1-jednorodne otrzymywane z  $m = N$  generatorów

$$G_1 = ZX \cdots XX, \quad G_2 = XZ \cdots XX, \quad \dots, \quad G_{N-1} = XX \cdots ZX, \quad G_N = XX \cdots XZ, \quad (59)$$

są tożsame z  $N$ -cząstkowymi stanami GHZ.

- $N$ -cząstkowe stany  $(N-1)$ -jednorodne otrzymywane z  $m = 1$  generatora (dla  $N$  parzystego)

$$G_1 = Z \cdots Z, \quad (60)$$

oraz z  $m = 2$  generatorów (dla  $N$  nieparzystego)

$$G_1 = X \cdots X, \quad G_2 = Z \cdots Z, \quad (61)$$

które w tym przypadku pozwalają na uzyskanie uogólnionego stanu splątanego Smolina [R84] postaci (33) osiągających górne ograniczenie  $N$ -cząstkowej współzależności  $\mathcal{D}_N$  [H3].

- 4-cząstkowe stany 2-jednorodne otrzymywane z  $m = 3$  generatorów

$$G_1 = XXXX, \quad G_2 = YYYY, \quad G_3 = \mathbb{1}XYZ, \quad (62)$$

stanowią mieszaninę równowagową 2 stanów czystych, jako że dla  $N = 4$  nie istnieje czysty stan AME.

- 5-cząstkowe stany 2-jednorodne otrzymywane z  $m = 5$  generatorów

$$G_1 = \mathbb{1}XYXY, \quad G_2 = \mathbb{1}ZXX\mathbb{1}, \quad G_3 = XYY\mathbb{1}Z, \quad G_4 = XZYZY, \quad G_5 = ZXZ\mathbb{1}X, \quad (63)$$

są równoważne czystym 5-kubitowym stanom AME otrzymywanym w powiązaniu z kwantowymi kodami korekcji błędów [R85].

- 5-cząstkowe stany 3-jednorodne otrzymywane z  $m = 4$  generatorów

$$G_1 = \mathbb{1}XXXX, \quad G_2 = \mathbb{1}YYYY, \quad G_3 = X\mathbb{1}XYZ, \quad G_4 = Y\mathbb{1}YZX, \quad (64)$$

będące stanami prawdziwie 5-cząstkowo splątanymi, posiadającymi wyłącznie 4-cząstkowe niezerujące się elementy tensora korelacji.

- 6-cząstkowe stany 3-jednorodne otrzymywane z  $m = 6$  generatorów

$$\begin{aligned} G_1 &= \mathbb{1}\mathbb{1}ZZZZ, & G_2 &= \mathbb{1}XYZ\mathbb{1}X, & G_3 &= \mathbb{1}ZXY\mathbb{1}Z, \\ G_4 &= XYZ\mathbb{1}Z\mathbb{1}, & G_5 &= Z\mathbb{1}Z\mathbb{1}XY, & G_6 &= ZYYZZY, \end{aligned} \quad (65)$$

odpowiadające czystym 6-kubitowym stanom AME [R86].

- 7-cząstkowe stany 3-jednorodne otrzymywane z  $m = 6$  generatorów

$$\begin{aligned} G_1 &= Y\mathbb{1}YXZZ, & G_2 &= \mathbb{1}XXYYZZ, & G_3 &= ZXYYXZ\mathbb{1}, \\ G_4 &= ZZ\mathbb{1}YXXY, & G_5 &= YY\mathbb{1}Y\mathbb{1}\mathbb{1}Y, & G_6 &= ZXYZ\mathbb{1}YX, \end{aligned} \quad (66)$$

stanowią mieszaninę równowagową 2 stanów czystych, jako że dla  $N = 7$  nie istnieje czysty stan AME [R58].

Zarówno dla przedstawionych powyżej, jak i wszystkich innych stanów  $k$ -jednorodnych przedstawionych w pracy [H5] potwierdziliśmy numerycznie, że charakteryzują się największą czystością przy określonej liczbie cząstek  $N$  oraz stopniu jednorodności  $k$ . Maksymalna czystość określonego stanu  $k$ -jednorodnego określa z kolei liczebność zbioru generatorów  $\mathcal{G}$  spełniających przedstawione wcześniej warunki 1)–3). O ile ścisła charakteryzacja pozwalająca na określenie maksymalnej ilości generatorów definiujących zbiór  $\mathcal{G}$  dla zadanych  $N$  i  $k$  pozostaje problemem otwartym, to w pewnych przypadkach wskazujemy na związek między generatorami z  $\mathcal{G}$  i szczególnymi wierszami tablic ortogonalnych  $OA(r, N, 4, s)$  [R87]. Pokazujemy, że dla zadanej tablicy ortogonalnej  $OA(r, N, 4, s)$  istnieje przypisanie poszczególnym wierszom  $N$ -kubitowych macierzy Pauliego, umożliwiającą konstrukcję stanów  $(N - s)$ -jednorodnych, o ile tylko macierze te spełniają warunki komutacji 1) i wzajemnej niezależności 2). Przykładowo, tablica ortogonalna  $OA(16, 4, 4, 2)$  pozwala na znalezienie  $m = 3$  generatorów  $G_1 = \mathbb{1}YYY, G_2 = XZYX, G_3 = YXZY$ , umożliwiającą konstrukcję 4-kubitowego stanu 2-jednorodnego. W tym samym względzie, tablica ortogonalna  $OA(16, 5, 4, 2)$  pozwala na znalezienie generatorów (64) 5-kubitowego stanu 3-jednorodnego, tablica ortogonalna  $OA(64, 6, 4, 3)$  pozwala na znalezienie generatorów (65) 6-kubitowego stanu 3-jednorodnego, oraz odpowiednio  $OA(32, 9, 4, 2)$  dla 9-kubitowego stanu 5-jednorodnego i  $OA(4096, 12, 4, 5)$  dla 12-kubitowego stanu 5-jednorodnego.

Schemat konstrukcji stanów  $k$ -jednorodnych wykorzystujących pojęcie generatorów określonych warunkami 1)–3) łatwo uogólnić na przypadek układów cząstek, których stan jest opisywany przestrzenią Hilberta o wyższych wymiarach. W tym przypadku rozważamy operatory  $G_i^{(d)}$  będące  $N$ -kubitowymi macierzami Heisenberga-Weyla  $S_{kl}^{(d)} = (X^{(d)})^k (Z^{(d)})^l$ , które pozwalają na skonstruowanie  $N$ -kubitowego stanu  $k$ -jednorodnego

$$\rho = \frac{1}{d^N} \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^{d-1} (G_1^{(d)})^{j_1} \dots (G_m^{(d)})^{j_m}, \quad (67)$$

którego czystość wynosi  $d^{m-N}$ . Powyższa konstrukcja pozwala otrzymać m.in.:

- $N$ -cząstkowe stany 1-jednorodne otrzymywane z  $m = N$  generatorów

$$\begin{aligned} G_1^{(d)} &= Z^{(d)} X^{(d)} \dots X^{(d)} X^{(d)}, & G_2^{(d)} &= X^{(d)} Z^{(d)} \dots X^{(d)} X^{(d)}, \\ & & \dots & \\ G_{N-1}^{(d)} &= X^{(d)} X^{(d)} \dots Z^{(d)} X^{(d)}, & G_N^{(d)} &= X^{(d)} X^{(d)} \dots X^{(d)} Z^{(d)}, \end{aligned} \quad (68)$$

które są tożsame z  $N$ -cząstkowymi stanami GHZ.

- 4-cząstkowe stany 2-jednorodne otrzymywane z  $m = 4$  generatorów

$$\begin{aligned} G_1^{(3)} &= \mathbb{1}^{(3)} Z^{(3)} Z^{(3)} (Z^{(3)})^2, & G_2^{(3)} &= \mathbb{1}^{(3)} X^{(3)} X^{(3)} (X^{(3)})^2, \\ G_3^{(3)} &= Z^{(3)} \mathbb{1}^{(3)} Z^{(3)} Z^{(3)}, & G_4^{(3)} &= X^{(3)} \mathbb{1}^{(3)} X^{(3)} X^{(3)}, \end{aligned} \quad (69)$$

będące czystymi stanami AME 4 kubitów (w odróżnieniu od 4 kubitów, dla których czysty stan AME nie istnieje).

Należy przy tym zwrócić uwagę, że w przypadku, gdy czysty stan  $k$ -jednorodny nie istnieje, największa czystość osiągnięta przez  $N$ -kubitowy stan  $k$ -jednorodny wynosi  $1/d$ .

#### 4.3.7 Analiza transferu splątania kwantowego do układu o zmienionej wymiarowości

Praca [H6] poświęcona została metodzie transferu splątania kwantowego z jednego układu na inny układ o zmienionej wymiarowości, co pozwala na efektywne uzyskanie informacji o istnieniu splątania bez konieczności bezpośredniej analizy układu splątanego. W pierwszej kolejności rozważamy dwupodukładową operację kontrolowanej rotacji (CROT), która stanowi podstawowy element protokołu transferu. Definiujemy operację unitarną na dwucząstkowym układzie kudit-kubit określoną jako obrót stanu kubit wokół osi  $y$  kontrolowany stanem  $d$ -wymiarowego układu postaci

$$U_{\text{CROT}} = \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle\langle j| \otimes \exp(-i\sigma_y \xi_j), \quad (70)$$

gdzie parametr  $\xi_j$  zależy od stanu wyjściowego kudit,  $\xi = \frac{j\pi}{2(d-1)}$ . Jak pokazujemy, tak zdefiniowana operacja pozwala na transfer informacji o stanie  $d$ -wymiarowego kudit, która może być odczytana dokonując stosownego pomiaru na układzie 2-wymiarowym. W tym celu jako przykład możemy wybrać kudit, którego stan wyjściowy określony jest jednym parametrem  $p$ , postaci

$$|\psi(p)\rangle_A = \sum_{k=0}^{d-1} \sqrt{\binom{d-1}{k} p^k (1-p)^{d-1-k}} |k\rangle. \quad (71)$$

Po dołączeniu kubit w stanie  $|0\rangle$  oraz dokonaniu operacji CROT na układzie kudit-kubit możliwe jest określenie wartości parametru  $p$  określającego stan kudit wyjściowego przez prosty pomiar obserwabli  $\sigma_z$  dokonanej na kubicie. Pokazujemy, że w szczególności dla  $d \rightarrow \infty$  wartość parametru  $p$  jest określona przez  $p = (1/\pi) \arccos \text{Tr}(\rho_B \sigma_z)$ .

W następnej kolejności analizujemy zastosowanie operacji CROT do transferu splątania między układami o zmienionej wymiarowości. Załóżmy zatem, że dany jest układ  $A$  złożony z pary  $d$ -wymiarowych kuditów będących w stanie  $|\psi\rangle_A = \sum_{j,l=0}^{d-1} a_{jl} |j\rangle |l\rangle$ . Po dołączeniu dodatkowego układu  $B$  w postaci dwóch kubitów w stanie  $|0\rangle$  oraz dokonaniu operacji CROT na odpowiednich parach kudit-kubit, otrzymujemy stan

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{AB} &= U_{\text{CROT}}^{\otimes 2} (|\psi\rangle_A \otimes |00\rangle_B) \\ &= \sum_{j,l=0}^{d-1} a_{jl} |j\rangle |l\rangle_A \otimes \left[ \cos \xi_j \cos \xi_l |00\rangle_B \right. \\ &\quad \left. + \cos \xi_j \sin \xi_l |01\rangle_B + \sin \xi_j \cos \xi_l |10\rangle_B + \sin \xi_j \sin \xi_l |11\rangle_B \right], \end{aligned} \quad (72)$$

który w ogólności może być silnie cztero-cząstkowo splątany, przez co jego poszczególne podukłady mogą być w stanie separowalnym. Celem transferu splątania z podukładu  $A$  na  $B$



dokonyjemy lokalnego rzutowania podukładu  $A$  na stan  $|++\rangle_A$ , gdzie  $|+\rangle = 1/\sqrt{d} \sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle$ , w rezultacie którego otrzymujemy łączny stan układu  $AB$  postaci

$$|\tilde{\Psi}\rangle_{AB} \propto |++\rangle_A \sum_{j,l=0}^{d-1} a_{jl} \left[ \cos \xi_j \cos \xi_l |00\rangle_B + \cos \xi_j \sin \xi_l |01\rangle_B + \sin \xi_j \cos \xi_l |10\rangle_B + \sin \xi_j \sin \xi_l |11\rangle_B \right]. \quad (73)$$

Zauważamy, że w przypadku, gdy pierwszy podukład  $A$  był początkowo w stanie maksymalnie splątany określonym przez  $a_{jl} = \delta_{jl}/\sqrt{d}$ , to w wyniku powyżej przedstawionego schematu transferu otrzymany układ  $B$  będzie w stanie, którego przekrycie ze stanem maksymalnie splątanych dwóch kubitów  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  maleje z wymiarem  $d$ , jednak asymptotycznie ( $d \rightarrow \infty$ ) osiąga wartość  $\pi^2/(\pi^2 + 4) \approx 0,712$ . W szczególnym zaś przypadku podukładu  $A$  będącego parą kubitów ( $d = 2$ ) pokazujemy, że operacja transferu z wykorzystaniem operacji CROT prowadzi do dokładnego transferu stanu podukładu  $A$  w stan podukładu  $B$ .

W dalszej kolejności badamy protokół transferu w przypadku, gdy układ  $A$  znajduje się w stanie mieszanym. Podobnie, jak w przypadku układu  $A$  w stanie czystym, pokazujemy, że dla  $d = 2$  operacja transferu prowadzi do dokładnego transferu stanu podukładu  $A$ ,  $\rho_A$ , w stan podukładu  $B$ . Dowodzimy również (dla dowolnej wymiarowości podukładu  $A$ ), że w przypadku układu  $A$  dwóch kubitów w stanie separowalnym w wyniku operacji transferu układ  $B$  dwóch kubitów również pozostanie w stanie separowalnym. Tym samym dochodzimy do wniosku, że protokół transferu wykorzystujący operację CROT pozwala na wykorzystanie podukładu  $B$  w charakterze świadka splątania podukładu  $A$  o innej wymiarowości.

Rozważamy również protokół transferu splątania kwantowego w sytuacji, gdy układ  $A$  ma ciągłe spektrum. W tym przypadku definiujemy operację CROT postaci

$$U_{\text{CROT}} = \int dx |x\rangle \langle x| \otimes (\cos x \mathbb{1} - i \sin x \sigma_y). \quad (74)$$

Rozważając działanie operacji CROT na przykładzie układu  $A$  w stanie gaussowskim zadany dwoma parametrami  $(\sigma, m)$

$$|\psi(\sigma, m)\rangle_A = \int dx \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{(x-m)^2}{4\sigma^2}} |x\rangle, \quad (75)$$

do którego dołączamy kubit w stanie  $|0\rangle$  zauważamy, że po dokonaniu operacji CROT na układzie  $|\psi(\sigma, m)\rangle_A |0\rangle_B$ , tomografia stanu kubitu pozwala na znalezienie parametrów opisujących stan wyjściowego układu  $A$ , mianowicie  $\sigma^2 = -(1/4) \ln \|\vec{b}\|^2$  oraz  $m = \text{arctg}(b_z/b_x)/2$ , z  $\vec{b}$  jako wektorem Blocha zadającym stan kubitu podukładu  $B$ .

W dalszej kolejności przechodzimy do analizy transferu splątania dla układu  $A$  będącego w stanie gaussowskim [R88, R89]

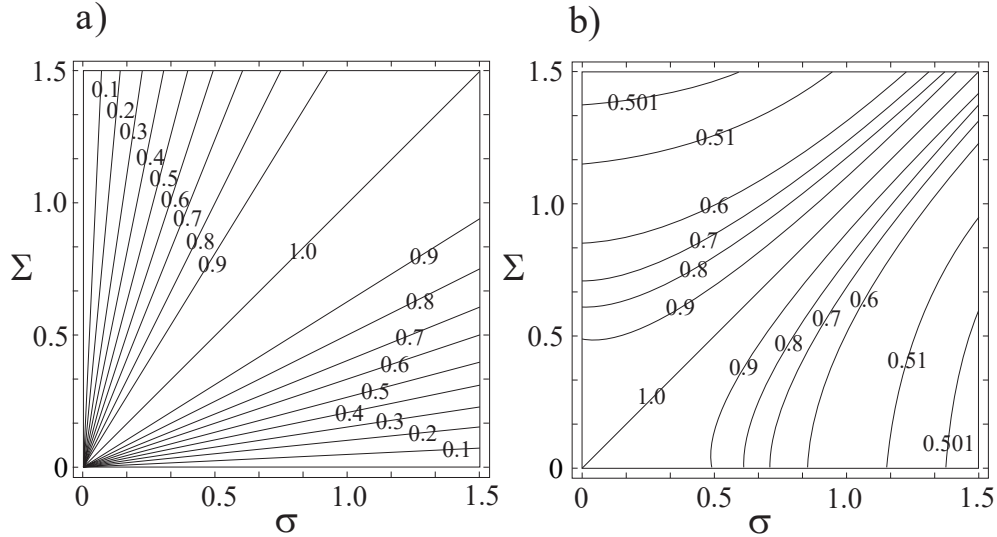
$$|\psi(\sigma, \Sigma)\rangle_A = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{1}{(2\pi\sigma\Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{(x_1+x_2)^2}{8\sigma^2}} e^{-\frac{(x_1-x_2)^2}{8\Sigma^2}} |x_1\rangle |x_2\rangle, \quad (76)$$

którego splątanie mierzone jest czystością podukładu [R90] wynoszącą  $P = 2\sigma\Sigma/(\sigma^2 + \Sigma^2)$ , przez co jest splątany dla  $\sigma \neq \Sigma$ . Pokazujemy, że transfer splątania zdefiniowany analogicznie, jak we wcześniejszym przypadku dla stanów ze spektrum dyskretnym, opartym o projekcję podukładu  $A$  na stan

$$|x_1^+ x_2^+(\Gamma)\rangle = \int dx_1 \int dx_2 \frac{1}{(2\pi\Gamma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{4\Gamma^2}} |x_1\rangle |x_2\rangle, \quad (77)$$

produkuje stan docelowych dwóch kubitów w postaci

$$|\tilde{\Psi}\rangle_B \propto a_+ |00\rangle + a_- |11\rangle, \quad (78)$$



Rysunek 4: Czystość podukładu w funkcji parametrów  $\sigma$  oraz  $\Sigma$  dla (a) wyjściowego układu  $A$  oraz (b) układu  $B$  po dokonaniu transferu splątania.

z

$$a_{\pm} = \frac{e^{-\frac{2\Sigma^2\Gamma^2}{\Sigma^2+\Gamma^2}} \pm e^{-\frac{2\sigma^2\Gamma^2}{\sigma^2+\Gamma^2}}}{\sqrt{\frac{(\sigma^2+\Gamma^2)(\Sigma^2+\Gamma^2)}{\sigma\Sigma\Gamma^2}}}, \quad (79)$$

przy czym największe prawdopodobieństwo udanej projekcji jest osiągnięte dla  $\Gamma = \sqrt{\sigma\Sigma}$  i wynosi  $4\sigma\Sigma/(\sigma + \Sigma)^2$ . Zauważamy przy tym, że mamy tutaj do czynienia z kompromisem: im większy poziom splątania wyjściowego układu  $A$  (im mniejsza czystość jego podukładu) tym mniejsze prawdopodobieństwo udanej projekcji wymaganej w protokole transferu.

Mając na uwadze, że analizy układu  $A$  dokonujemy metodą pośrednią analizując układ  $B$ , uzyskany wynik możemy porównać z bezpośrednią metodą określania splątania układu  $A$  badając czystość jego podukładu. Rys.4 przedstawia wartości czystości podukładów poszczególnych układów, odpowiednio układu wyjściowego  $A$  oraz układu  $B$  dwóch kubitów w stanie  $|\tilde{\Psi}\rangle_B$  (78) po dokonaniu transferu splątania. Należy przy tym zwrócić uwagę, że warunkiem koniecznym i dostatecznym splątania układu  $A$  w stanie gaussowskim bazującym na metodach określonych w [R91, R92], jest warunek  $(\sigma^2 - \Sigma^2)^2 > 0$ , który jest zbieżny z wnioskowaniem opartym na analizie stanu układu  $B$  dwóch kubitów uzyskanego w procesie transferu splątania.

#### 4.3.8 Dynamika chaotyczna jako efekt oddziaływań kwantowego układu złożonego

W pracy [H7] poddajemy analizie zachowanie układu  $N$  cząstek oddziałujących, pokazując, że efektywna dynamika pojedynczego kubitów na skutek oddziaływań międzycząstkowych przejawia charakter nieliniowy prowadzący do zachowań chaotycznych. Rozważamy układ  $N$  oddziałujących kubitów, będących początkowo w stanie produktowym, których oddziaływanie zadane jest operatorem Hamiltona postaci

$$H = \frac{g}{2(N-1)} \left( \sum_{n=1}^N \sigma_z^{(n)} \right)^2. \quad (80)$$

W dalszej kolejności skupiamy się na efektywnej dynamice jednego kubitów ( $n = 1$ ), przyjmując jego stan początkowy jako  $\rho = \sum_{j,k=1}^d \rho_{j,k} |j\rangle\langle k|$ . Zauważamy, że operator Hamiltona możemy rozdzielić na dwie komutujące części

$$H = H_1 + H_{\text{env}}, \quad (81)$$

gdzie  $H_1$  jest operatorem działającym w przestrzeni wybranego przez nas kubit, a  $H_{\text{env}}$  operatorem działającym w przestrzeni pozostałych  $N - 1$  kubitów. Tym samym, dynamika wybranego kubit w układzie zadana jest przez

$$e^{-iH_1 t} = U_1 V_2 V_3 \dots V_N, \quad (82)$$

z  $U_1 = \exp(i\frac{\chi}{2}\sigma_z^{(1)})$  oraz  $V_j = \exp(i\chi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(j)})$  i  $\chi = -2gt$ . Pokazujemy, że w granicy dużej liczby cząstek  $N$  (równoważnej z granicą słabych lub krótkotrwałych oddziaływań wyrażonych przez związek  $\chi = \frac{\theta}{N-1}$  z pewną skończoną stałą  $\theta$ ) dynamika jednego kubit w wyniku oddziaływań parowych jest równoważna

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V_2 V_3 \dots V_N = e^{-igt\langle\sigma_z\rangle\sigma_z/2}, \quad (83)$$

z kolei

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{i\frac{\theta}{2(N-1)}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(1)}} = \mathbb{1}. \quad (84)$$

Widzimy zatem, że każdy z oddziałujących kubitów podlega efektywnej nieliniowej dynamice zadanej przez operator ewolucji  $U(\rho) = e^{-i\beta/2\langle\sigma_z\rangle\sigma_z}$ , z  $\langle\sigma_z\rangle = \text{Tr}(\rho\sigma_z)$  oraz  $\beta = g\tau$ , gdzie  $\tau$  wyraża czas trwania oddziaływania.

W naszym modelu rozważamy sytuację, w której każdorazowo po czasie oddziaływania  $\tau$  z pomocą zewnętrznego pola dokonujemy obrotu każdego kubit wokół osi  $y$ , a następnie aplikujemy działanie kanału tłumiącego amplitudę zadanego operatorami Krausa  $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{r} \end{pmatrix}$

i  $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , które to operacje definiują odwzorowanie postaci

$$\rho_{t+1} = K_1 V(\rho)\rho_t V^\dagger(\rho)K_1^\dagger + K_2 V(\rho)\rho_t V^\dagger(\rho)K_2^\dagger, \quad (85)$$

z operatorem ewolucji  $V(\rho) = e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_y}U(\rho)$  generującym standardową dynamikę uderzanego rotatora. Stan kubit po  $t$  krokach ewolucji zadany jest zatem przez  $\rho_t = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + x_t\sigma_x + y_t\sigma_y + z_t\sigma_z)$ , ze składowymi wektora Blocha  $\mathbf{v}_t$  danymi przez

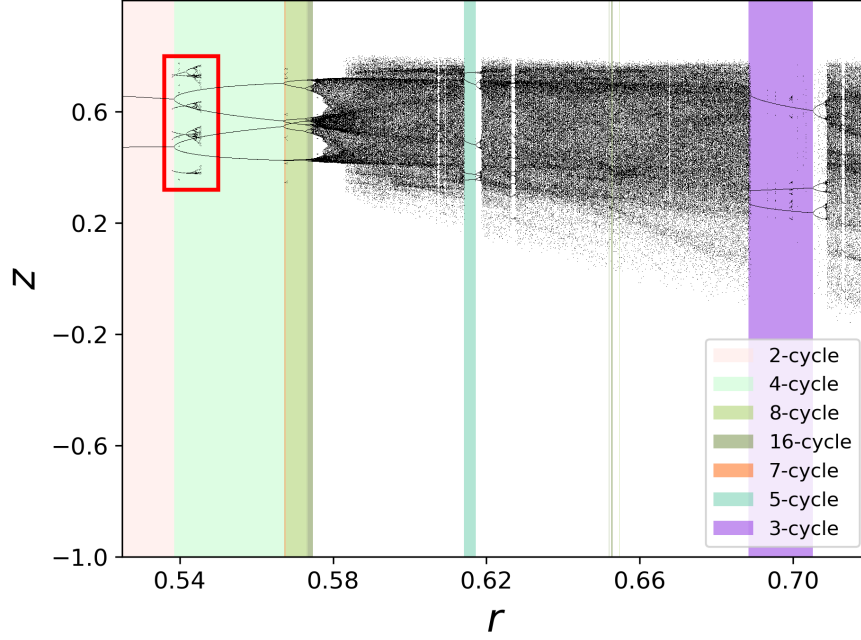
$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \sqrt{r}[(x_t \cos(\beta z_t) - y_t \sin(\beta z_t)) \cos \alpha + z_t \sin \alpha], \\ y_{t+1} &= \sqrt{r}[x_t \sin(\beta z_t) + y_t \cos(\beta z_t)], \\ z_{t+1} &= 1 + r[(y_t \sin(\beta z_t) - x_t \cos(\beta z_t)) \sin \alpha + z_t \cos \alpha - 1]. \end{aligned} \quad (86)$$

Poszukiwanie punktów stałych modelu  $\mathbf{v}^*$  sprowadza się do znalezienia miejsc zerowych funkcji

$$\begin{aligned} f(z^*, r, \alpha, \beta) &= -z^* + 1 + rz^* \cos(\alpha) - r \\ &+ rz^* \sin^2(\alpha) \frac{r - \sqrt{r} \cos(\beta z^*)}{1 + r \cos(\alpha) - \sqrt{r}(\cos(\alpha) + 1) \cos(\beta z^*)}, \end{aligned} \quad (87)$$

czego w dalszej kolejności dokonujemy metodami numerycznymi, ustalając arbitralnie wartości parametrów.

Jak wiadomo [R64], dla wartości parametrów  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 6$ , ewolucja generowana przez operator  $V$  w granicy klasycznej prowadzi do chaotycznej dynamiki uderzanego rotatora. W takim przypadku przedstawiony model opisany będzie jednym parametrem  $r$  opisującym siłę działania kanału tłumiącego amplitudę. Zauważmy, że w granicznym przypadku  $r = 0$  stan układu zostaje zrzucony na  $|0\rangle$  już w pierwszym kroku ewolucji, z kolei w przypadku  $r = 1$  tłumienie nie występuje i w związku z tym ewolucja układu redukuje się do dynamiki uderzanego rotatora w reżimie chaotycznym. Jak zatem widzimy, w zakresie parametrów  $0 < r < 1$  spodziewać się można różnych reżimów zachowania modelu.



Rysunek 5: Diagram bifurkacyjny dla składowej z wektora Blocha względem parametru tłumienia  $r$  z zaznaczonymi obszarami oscylacji rzędów zgodnych z porządkiem Szarkowskiego.

Z analizy funkcji (87) znajdujemy, że dla zakresu  $0 \leq r \leq r_b \approx 0,9719$  model przejawia istnienie jednego punktu stałego  $\mathbf{v}_0$ , natomiast dla  $r_b \leq r < 1$  trzy różne punkty stałe  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ . Analizy stabilności punktów stałych dokonujemy z pomocą jacobianu wyznaczonego przy linearyzacji odwzorowania (86) w pobliżu punktów stałych, postaci

$$\mathcal{A}_{\mathbf{v}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{r} \\ -\sqrt{r} \sin(\beta z^*) & \sqrt{r} \cos(\beta z^*) & -\beta \sqrt{r} (y^* \sin(\beta z^*) + x^* \cos(\beta z^*)) \\ r \cos(\beta z^*) & r \sin(\beta z^*) & \beta r (y^* \cos(\beta z^*) - x^* \sin(\beta z^*)) \end{pmatrix}. \quad (88)$$

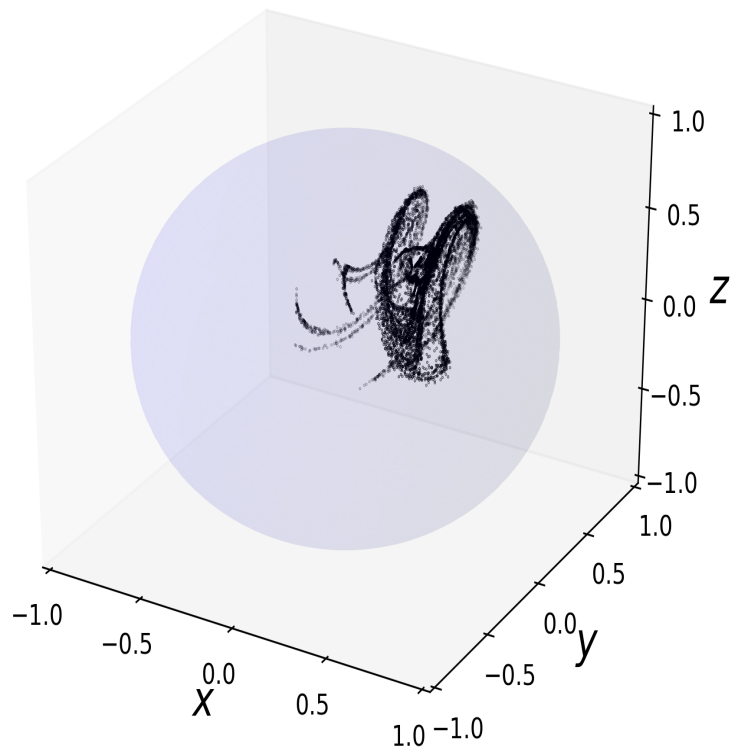
Dla  $r \leq r_1 \approx 0,3138$  punkt stały  $\mathbf{v}_0$  jest punktem stabilnym, z kolei dla  $r > r_1$  staje się on niestabilny. Dla  $r > r_b$  pojawiają się nowe punkty stałe, z których  $\mathbf{v}_1$  jest punktem stabilnym, natomiast  $\mathbf{v}_2$  niestabilnym.

Dla zakresu  $r_1 < r < r_b$  model nie posiada żadnych stabilnych punktów stałych. Dla  $r_1$  obserwujemy bifurkację punktu stałego i pojawienie się oscylacji rzędu 2, w wyniku której dynamika kubitu ogranicza się do przeskoków między dwoma stanami w obrębie kuli Blocha. Zwiększając parametr  $r$  obserwujemy pojawienie się oscylacji wyższych rzędów  $2^k$ . Wyznaczając kolejne wartości  $r_k$ , w których dochodzi do kolejnych bifurkacji prowadzących do pojawienia się oscylacji rzędów  $2^k$ , pokazujemy, że iloraz kolejnych różnic zbliża się do stałej Feigenbauma

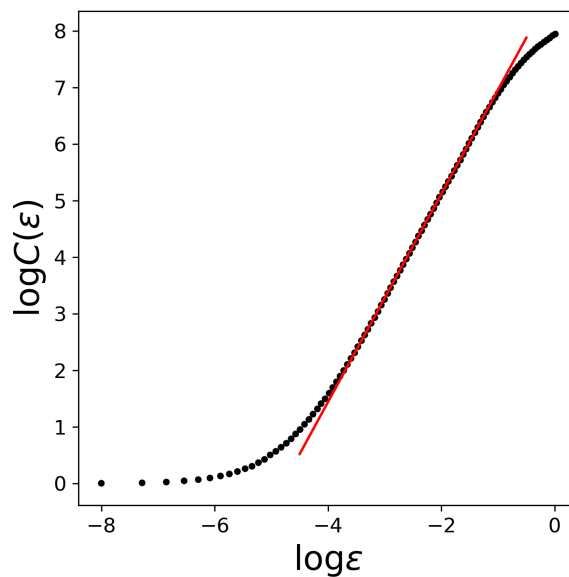
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,669 \dots, \quad (89)$$

będącej uniwersalnym zachowaniem charakteryzującym wiele nieliniowych modeli [R71]. Diagram bifurkacyjny dla składowej wektora Blocha z przedstawia Rys.5, gdzie ukazane są następujące po sobie zmiany rzędu oscylacji zgodne z porządkiem Szarkowskiego  $1 \prec 2 \prec 4 \prec 8 \prec \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3$ , przy czym oscylacje nieparzystych rzędów pojawiają się w oknach okresowości w obrębie zachowania chaotycznego.

Po przekroczeniu wartości  $r_\infty \approx 0,578$  zachowanie układu staje się chaotyczne, z kolei dla wartości parametru  $r_b < r < 1$  układ ponownie powraca do zachowania stabilnego. Dla przedziału  $r_\infty < r < r_b$ , w wyjątkiem okien oscylacji, asymptotyczna dynamika wektora Blocha ma



Rysunek 6: Wizualizacja dziwnego atraktora otrzymana dla 10000 kroków ewolucji losowego stanu początkowego  $v_0$  dla wartości parametru tłumienia  $r = 0,75$ . Współrzędne wektorów Blocha zaznaczone są czarnymi kropkami.



Rysunek 7: Estymacja wymiaru fraktalnego dziwnego atraktora dla  $r = 0,75$ . Dla wybranego punktu na atraktorze  $w$  określamy kulę o promieniu  $\epsilon$ , po czym dla zadanego promienia zliczamy liczbę punktów po 10000 krokach ewolucji, zawartych w kuli. Uśredniona po różnych wyborach  $v_0$  i  $w$  liczba punktów  $C(\epsilon)$  skaluje się z promieniem kuli jak  $C(\epsilon) \propto \epsilon^{d_f}$ , gdzie  $d_f$  to wartość wymiaru fraktalnego, którą odczytujemy z nachylenia najlepszego liniowego dopasowania liniowej części zależności  $\ln C$  od  $\ln \epsilon$ .

miejsce na dziwnym atraktorze tworzącym specyficzny podzbiór kuli Blocha, co przedstawia Rys.6. Określając wymiar korelacyjny metodami numerycznymi dla 10000 kroków ewolucji losowych stanów początkowych  $v_0$ , wyznaczamy wymiar fraktalny dziwnego atraktora, którego wartość (dla określonego parametru  $r = 0,75$ ) wynosi  $d_f = 1,84$  (Rys.7). Zauważamy przy tym, że diagram bifurkacyjny odznacza się pojawieniem się struktur samopodobnych w obrębie przedziału  $r < r_\infty$ , które w naszym przypadku charakteryzują model kwantowy rozważany w naszej pracy, który z kolei nie ma odpowiednika w uniwersalnym schemacie bifurkacyjnym Feigenbauma, występującym dla jednowymiarowych modeli klasycznych.

## 5 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

### 5.1 Osiągnięcia dydaktyczne

#### 5.1.1 Promotorstwo prac doktorskich

**Promotor pomocniczy** w przewodzie doktorskim Mahaswety Pandit, rozprawa doktorska pt. „*Characterization of quantum correlations with strong non-classical properties*”, obrona rozprawy doktorskiej: 7.07.2022, Gdańsk.

#### 5.1.2 Nauczanie akademickie

##### Rok akademicki 2022/2023:

- *Teoretyczne i Praktyczne podstawy matematyki wyższej* – wykład (25 godzin) i ćwiczenia (35 godzin) na kierunku Fizyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański
- *Fizyka kwantowa* – ćwiczenia (45 godzin) na kierunku Fizyka, I r. studiów II st., Uniwersytet Gdański
- *Analiza wektorowa* – wykład (45 godzin) i ćwiczenia (45 godzin) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański
- *Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa* – ćwiczenia (15 godzin, 2 grupy) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański
- *Algebra liniowa* – ćwiczenia (30 godzin) na kierunku Fizyka Medyczna, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański
- *Zajęcia wyrównawcze z matematyki* (15 godzin) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański

##### Rok akademicki 2021/2022:

- *Mechanika analityczna* – wykład (30 godzin) i ćwiczenia (30 godzin) na kierunku Fizyka, II r. studiów II st., Uniwersytet Gdański
- *Teoretyczne podstawy matematyki wyższej* – wykład (25 godzin) na kierunku Fizyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański
- *Fizyka kwantowa* – ćwiczenia (45 godzin) na kierunku Fizyka, I r. studiów II st., Uniwersytet Gdański
- *Analiza wektorowa* – wykład (45 godzin) i ćwiczenia (45 godzin) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański

- *Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa* – ćwiczenia (15 godzin, 2 grupy) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański
- *Zajęcia wyrównawcze z matematyki* (30 godzin) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański

#### **Rok akademicki 2020/2021:**

- *Analiza wektorowa* – wykład (45 godzin) i ćwiczenia (45 godzin) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański
- *Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa* – ćwiczenia (15 godzin, 2 grupy) na kierunku Bioinformatyka, I r. studiów I st., Uniwersytet Gdański

#### **Rok akademicki 2013/2014:**

- *Mechanika* – ćwiczenia (30 godzin) i pracownia komputerowa (30 godzin) na kierunku Fizyka, I r. studiów magisterskich, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
- *Mechanika* – ćwiczenia (30 godzin) na kierunku Biofizyka, I r. studiów magisterskich, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

#### **Rok akademicki 2012/2013:**

- *Mechanika* – ćwiczenia (30 godzin) na kierunku Fizyka, I r. studiów magisterskich, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
- *Mechanika* – ćwiczenia (30 godzin) na kierunku Biofizyka, I r. studiów magisterskich, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

#### **Rok akademicki 2011/2012:**

- *Technologie informacyjne* – pracownia komputerowa (30 godzin) na kierunku Filozofia, I r. studiów magisterskich, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
- *Komunikacja multimedialna* – pracownia komputerowa (30 godzin) na kierunku Filozofia, I r. studiów magisterskich, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

#### **Rok akademicki 2010/2011:**

- *Technologie informacyjne* – pracownia komputerowa (30 godzin) na kierunku Filozofia, I r. studiów magisterskich, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

## **5.2 Osiągnięcia organizacyjne**

- Przewodniczący komisji rekrutacyjnej na Wydziale Matematyki Fizyki i Informatyki; Uniwersytet Gdański, rok 2023.
- Przewodniczący komisji rekrutacyjnej na II st. studiów na kierunku *Quantum information technology* na Wydziale Matematyki Fizyki i Informatyki; Uniwersytet Gdański, rok 2022.

## **5.3 Osiągnięcia w popularyzowaniu nauki**

- Wykład popularyzujący: *Zjawiska kwantowe – od pomiarów ciastek do teleportacji*, wygłoszony w Liceum Akademii Dobrej Edukacji w Gdańsku, marzec 2020.
- Wykład popularyzujący: *Kwantowe związki, czyli co odróżnia światło i atomy od kulek, monet i skarpetek*, wygłoszony w Liceum Akademii Dobrej Edukacji w Gdańsku, marzec 2019.
- Udział w przygotowywaniu programu telewizyjnego *Shot naukowy – Informacja kwantowa*, wrzesień 2011.

## 6 Inne osiągnięcia naukowe

### 6.1 Nagrody

- Indywidualna Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego 2-go stopnia, rok 2022.
- Stypendium Miasta Poznania dla młodych badaczy z poznańskiego środowiska naukowego, rok 2013.
- Zespołowa Nagroda Rektora UAM 2-go stopnia, rok 2013.

### 6.2 Dodatkowe osiągnięcia naukowo-badawcze po uzyskaniu stopnia naukowego doktora

- **Detekcja splątania wielocząstkowego za pomocą losowych pomiarów**

W pracy [O1] przedstawiamy schemat detekcji prawdziwie wielocząstkowego splątania w przypadku braku wyróżnionego układu odniesienia, względem którego określone są bazy pomiarowe. Punktem wyjścia przedstawionej metody jest pomiar układu wielocząstkowego przy losowych ustawieniach lokalnych pomiarów i analiza elementów tensora korelacji zarówno pełnego, jak i niepełnego rzędu przy użyciu drugich momentów odpowiednich rozkładów elementów tensora korelacji. W sposób analityczny wprowadzamy kryterium splątania dla dwóch kubitów, jak również przedstawiamy silne przesłanki za istnieniem świadka prawdziwie wielocząstkowego splątania dla trzech i czterech kubitów.

- **Majoryzacyjne zasady nieoznaczoności**

Punktem wyjścia naszej pracy [O2] była próba rozszerzenia uniwersalnej zasady nieoznaczoności [R93] opartej o koncepcję majoryzacji rozkładów prawdopodobieństwa na przypadek zasady nieoznaczoności uwzględniającej pamięć poboczną. W tym celu w pracy wprowadzamy strukturę operacyjną, w ramach której formalizujemy pojęcie warunkowej majoryzacji, z pomocą której definiujemy zasadę warunkowej nieoznaczoności. Rozważamy przypadek pamięci klasycznej i konstruujemy zasady warunkowej nieoznaczoności, dające dolne ograniczenie na minimalną nieoznaczoność Bolka, dla pary niekompatybilnych obserwabli Alicji warunkowanych dowolnym pomiarem, który Bolek wykonuje na swoim układzie.

- **Kontekstualność w ujęciu teorii zasobów**

W pracy [O3] przedstawiliśmy pojęcie kontekstualności w oparciu o aksjomaty znane z teorii splątania. W szczególności określiliśmy klasę operacji, przekształcającej rodziny rozkładów prawdopodobieństwa (tu: w ogólności będącymi układami kontekstualnymi) i podaliśmy aksjomaty, które muszą spełniać miary ilościujące wartość kontekstualności. Wykazaliśmy również własność asymptotycznej ciągłości miary kontekstualności zdefiniowanej przez względną entropię kontekstualności [O4].

- **Analiza efektów oddziaływań magnetycznych w modelu Hubbarda**

Prace [O5, O6] stanowią kontynuację podjętych w latach wcześniejszych badań poświęconych analizie rozszerzonego modelu Hubbarda w granicy wąskiego pasma [O7, O8, O9]. W pracy [O5] analizujemy model 1-wymiarowego łańcucha z oddziaływaniami jednowęzłowymi oraz międzywęzłowymi oddziaływaniami ładunkowymi i magnetycznymi typu Isinga. Wykorzystując metodę macierzy przejścia znajdujemy rozwiązania ściśle modelu w postaci sumy stanów, co w dalszej kolejności pozwala na analizę termodynamicznych własności układu. Praca [O6] poświęcona jest analizie wpływu magnetycznego oddziaływania wymiennego różnego typu na stabilność faz uporządkowanych występujących w modelu. W tym celu wykorzystujemy różne metody analizy, m.in. metodę wariacyjną



uwzględniającą przybliżenie pola średniego, metody numeryczne Monte Carlo, jak również w szczególnych przypadkach metody ścisłe. Znajdujemy diagramy fazowe określające obszary stabilności faz uporządkowanych dla różnych wartości parametrów modelu i różnych wymiarowości sieci, oraz określamy warunki stabilności separacji faz, tj. stabilnej koegzystencji dwóch domen o określonej wartości parametru porządku.

## 6.3 Osiągnięcia naukowo-badawcze z okresu poprzedzającego nadanie stopnia naukowego doktora

### 6.3.1 Badania uwzględnione w doktoracie

- **Aktywacja nielokalnych korelacji w procesie wymiany splątania**

Jednym z pierwszych problemów, który został mi zaproponowany w ramach teorii informacji kwantowej, dziedziny znacznie odmiennie od mojego dotychczasowego obszaru działań naukowych, był problem aktywacji nielokalnych korelacji kwantowych. Jedno z podejść do tego problemu zaprezentowane zostało w pracy [O10], gdzie rozważyliśmy wielokrotną wymianę splątania kwantowego w łańcuchu stanów dwu-kubitowych. Początkowo wymagamy, aby każdy ze stanów w łańcuchu nie dawał możliwości łamania nierówności CHSH. Pokazujemy, że po wykonaniu procesów wymiany splątania na każdej parze sąsiadujących w łańcuchu stanów, możliwe jest (dla dostatecznie dużej liczby par stanów kwantowych) uzyskanie stanu cząstek na końcach łańcucha, którego korelacje pozwalają na złamanie nierówności CHSH. W pracy analizujemy warunki (wyniki pomiarów Bella, szczegółowe własności stanów kwantowych par cząstek składających się na łańcuch), przy jakich możliwa jest aktywacja nielokalnych korelacji. Pokazujemy również, że wymiana splątania dokonywana z wykorzystaniem tylko jednej klasy stanów kwantowych nie prowadzi do aktywacji nielokalnych korelacji.

- **Miary kontekstualności**

W odróżnieniu od układów klasycznych, korelacje kwantowe przejawiają się w formie kwantowej kontekstualności, gdzie wyniki pomiarów różnych obserwabli nie mogą zostać opisane jednym łącznym rozkładem prawdopodobieństwa. Innymi słowy, łączny rozkład prawdopodobieństwa, który poprawnie opisuje statystyki wyników pomiarów pewnego zbioru współmierzalnych obserwabli (kontekstu) nie może opisywać statystyk wyników otrzymywanych dla innego kontekstu. Kwantowe układy kontekstualne przejawiają zatem cechy istnienia korelacji między wyborem kontekstu a rodziną rozkładów prawdopodobieństwa opisującą statystyki dla wszystkich możliwych kontekstów pomiarowych. W pracy [O4] zaproponowaliśmy miarę kontekstualności układów kontekstualnych zwaną informacją wzajemną kontekstualności, która ilościowo określa wartość tych korelacji. Niezależnie od niej zdefiniowaliśmy miarę określaną jako względna entropia kontekstualności, która określa statystyczną odległość rozważanego układu kontekstualnego (rodziny rozkładów prawdopodobieństw) do najbliższego klasycznego łącznego rozkładu prawdopodobieństwa. Jak się okazuje, zachodzi równość obu miar kontekstualności, co pokazujemy w pracy. Ponadto, wyznaczamy wartości miary kontekstualności dla najważniejszych układów kontekstualnych: kwadratu Peresa-Mermina, gwiazdy Mermina, układu KCBS, układu Popescu-Rohrlicha, jak również dla całej klasy układów kontekstualnych łańcuchowych nierówności Bella.

- **Związek pozakwantowych korelacji z kodami swobodnego dostępu**

W pracy [O11] analizujemy możliwość wzajemnej wymienialności dwóch pozakwantowych układów. Jednym z nich jest kod swobodnego dostępu – hipotetyczny układ umożliwiający za pomocą jednego przesłanego bitu informacji, dostarczyć odbiorcy informacji o wartości dowolnego z dwóch bitów informacji wysłanego przez nadawcę. Drugim zasobem jest układ Popescu-Rohrlicha, którego korelacje pozwalają na złamanie nierówności

CHSH aż to maksymalnej algebraicznej wartości. Wiadomym jest, że za pomocą układu Popescu-Rohrlicha wraz z dodatkowym bitem przesłanym do odbiorcy można zasymulować działanie kodu swobodnego dostępu. Powstaje zatem naturalne pytanie, czy możliwa jest również symulacja odwrotna, mianowicie, czy za pomocą kodu swobodnego dostępu można otrzymać korelacje charakteryzujące układ Popescu-Rohrlicha. W pracy wprowadzamy pojęcie układu kodu swobodnego dostępu, który wraz z przesłanym bitem informacji działa jak kod swobodnego dostępu. Następnie wykazujemy, że jeśli układ ten spełnia warunek niesygnalizowania, to pozwala on symulować działanie układu Popescu-Rohrlicha, co dowodzi, że dwa pozakwantowe układy są sobie równoważne. W dalszej części sformułowaliśmy nierówność wiążącą różne zasoby wykazując m.in., że kod swobodnego dostępu oraz 1 bit współdzielonej losowości pozwala na otrzymanie korelacji układu Popescu-Rohrlicha oraz dodatkowo uzyskanie kanału wymazującego.

- **Zasady wykluczania informacji**

W pracy [O12] analizujemy relacje wykluczania informacji ograniczające sumę dwóch wzajemnych informacji dla odpowiednich par obserwabli mierzonych na dowolnych stanach dwuukładowych. W pierwszej kolejności zwracamy uwagę na słabość relacji wykluczania informacji Halla [R94], która wynika bezpośrednio z entropowej zasady nieoznaczoności Maassena-Uffinka [R95], co związane jest z faktem, że dla obserwabli posiadających wspólny wektor własny zasada Maassena-Uffinka staje się pusta. Wprowadziliśmy relację wykluczania informacji, dla przypadku, gdy jedna osoba mierzy tylko jedną obserwabłą, natomiast druga mierzy jedną z dwóch obserwabli i pokazaliśmy, że jest ona silniejsza niż zasada Halla. Podaliśmy dowód tej relacji dla pewnych szczególnych przypadków. Wprowadziliśmy również relację wykluczania informacji ograniczającą wzajemne informacje w przypadku, gdy obie osoby mierzą jedną z dwóch obserwabli oraz podaliśmy dowód relacji dla pewnej szczególnej klasy stanów kwantowych.

### 6.3.2 Badania nieuwzględnione w doktoracie

- **Detekcja splątania kwantowego spinów elektronów za pomocą ferromagnetycznych kontaktów**

Praca [O13] (również [O14]) poświęcona została analizie wykorzystania nieidealnych detektorów ferromagnetycznych pod kątem możliwości detekcji splątania kwantowego oraz ich użyteczności do wykorzystania podstawowych protokołów kwantowych. Jako punkt wyjścia, przedstawiamy model pomiaru za pomocą nieidealnych detektorów, który jest równoważny pomiarowi idealnemu dokonany na układzie poddanemu działaniu kanału depolaryzującego. Badamy minimalną wartość polaryzacji spinowej ferromagnetyka określającej sprawność detektorów, dla której możliwa jest detekcja splątania dwóch spinów oparta na wykorzystaniu różnych świadków splątania. Określamy również warunki, przy których nieidealne detektory ferromagnetyczne mogą być wykorzystywane w protokole destylacji klucza kryptograficznego SIMCAP, jak również do łamania nierówności CHSH. Adaptując fenomenologiczny model dekoherencji spinowej, analizujemy również możliwości detekcji uwzględniające efekty relaksacji i defazowania spinów elektronów w kanale transportowym.

- **Zagadnienia fizyki popularnej**

W pracy [O15] przedstawiona została analiza ruchu punktu materialnego poruszającego się po zakrzywionym torze z uwzględnieniem tarcia. W szczególności rozważamy ruch po torach w kształcie pionowo ustawionych okręgu i elipsie, gdzie określamy minimalną wartość prędkości początkowej potrzebnej do pokonania pełnej długości toru. Dla toru w kształcie okręgu znajdujemy rozwiązanie ściśle, z kolei w ogólności określamy wartości prędkości i współczynnika tarcia, dla których ruch ustaje, bądź punkt materialny traci

kontakt z torem.

Praca [O16] poświęcona została omówieniu metody konstruowania sieci oporników jednostkowych, których opór zastępczy przyjmować ma określoną wartość. Zauważamy, że schemat dołączania kolejnych segmentów kilku oporników w sposób naprzemiennie równoległy i szeregowy odtwarza wartość oporu zastępczego zadanego przez odpowiadający schematowi ułamek łańcuchowy, co w prosty sposób pozwala na konstrukcję układu, którego opór zastępczy ma przyjmować wartość dowolnej liczby rzeczywistej z określoną dokładnością.

- **Przepływ informacji przy oddziaływaniu z zamkniętymi krzywymi czasopodobnymi**  
Oddziaływanie układów kwantowych z zamkniętymi krzywymi czasopodobnymi, których istnienie sugerują szczególne rozwiązania OTW, zwykle opisywane są w formalizmie nieliniowego modelu Deutscha [R96]. Model obwodowy Ralpa-Myersa [R97] stanowiący opis alternatywny zamkniętych krzywych czasopodobnych zdaje się wskazywać na ich silny potencjał, który miałby pozwalać m.in. na rozróżnianie nieortogonalnych stanów kwantowych. W komentarzu [O17] pokazujemy, że wniosek ten oparty jest na niejasnej przesłance, co do opisu zasobu, jaki wykorzystywany jest w modelu obwodowym. W szczególności pokazujemy, że różne postaci klasycznie skorelowanych stanów o określonych własnościach wykorzystywanych w charakterze zasobów, mogą prowadzić do zasadniczo odmiennych rezultatów.
- **Uporządkowania magnetyczne i ładunkowe w rozszerzonym modelu Hubbarda**  
W pracach [O7, O8, O9] przedstawiona została analiza modelu Hubbarda w granicy wąskiego pasma z efektywnymi oddziaływaniami jednowęzłowymi oraz międzywęzłowymi oddziaływaniami magnetycznymi i ładunkowymi. W zależności od charakteru i siły występujących oddziaływań znajdujemy diagramy fazowe w przybliżeniu pola średniego. Praca [O7] poświęcona została analizie przypadku oddziaływań magnetycznych. Pokazujemy dla jakich wartości parametrów modelu stan podstawowy realizowany jest przez fazę magnetycznie uporządkowaną lub fazę nieuporządkowaną. Znajdujemy również warunki, przy których możliwa jest separacja faz, tj. stabilna koegzystencja dwóch domen z różną koncentracją ładunku. W pracy [O8] rozważamy oddziaływania ładunkowe uwzględniające najbliższych, jak również następnych najbliższych sąsiadów. Pokazujemy, że w zależności od wartości parametrów modelu, poza jednorodnymi fazami stabilnymi (ładunkowo uporządkowaną i nieuporządkowaną), możliwe jest wystąpienie separacji faz, zarówno ładunkowo uporządkowanej–nieuporządkowanej, jak i separacji dwóch faz ładunkowo uporządkowanych o różnych wartościach koncentracji ładunku. W pracy [O9] rozważamy efekty oddziaływań zarówno magnetycznych jak i ładunkowych w granicy silnego jednowęzłowego potencjału odpychającego. Pomimo swojej prostoty, model wykazuje złożone zachowanie, zarówno w odniesieniu do możliwości występowania wielu rodzajów stabilnych faz uporządkowanych (uwzględniające uporządkowania magnetyczne, ładunkowe, mieszane oraz separacje różnych faz), jak również w odniesieniu do zachowań wielokrytycznych charakteryzujących wykresy fazowe.

## 6.4 Dane naukometryczne

- Liczba recenzowanych publikacji: 24 (11 przed doktoratem)
- Liczba nieopublikowanych manuskryptów w bazie arXiv: 3 (obecnie są na etapie recenzji w czasopismach naukowych)

1) <https://arxiv.org/abs/2208.01983>

2) <https://arxiv.org/abs/2209.05197>

3) <https://arxiv.org/abs/2303.09238>

- Liczba cytowań (źródło: **Google Scholar**, 1.08.2023)
  - Całkowita liczba cytowań: 402
  - H-indeks: 11
  - I10-indeks: 13
- Liczba cytowań (źródło: **Web of Science**, 1.08.2023)
  - Całkowita liczba cytowań: 300
  - Całkowita liczba cytowań (bez autocytowań): 285
  - H-indeks: 10

## Referencje: publikacje aplikanta wchodzące w skład cyklu habilitacyjnego

- [H1] Waldemar Kłobus, Michał Oszmaniec, Remigiusz Augusiak, and Andrzej Grudka. Communication strength of correlations violating monogamy relations. *Found. Phys.*, 46:620, 2016.
- [H2] Justyna Łodyga, Waldemar Kłobus, Ravishankar Ramanathan, Andrzej Grudka, Michał Horodecki, and Ryszard Horodecki. Measurement uncertainty from no-signaling and nonlocality. *Phys. Rev. A*, 96:012124, Jul 2017.
- [H3] Waldemar Kłobus, Marek Miller, Mahasweta Pandit, Ray Ganardi, Lukas Knips, Jan Dżiewior, Jasmin Meinecke, Harald Weinfurter, Wiesław Laskowski, and Tomasz Paterek. Cooperation and dependencies in multipartite systems. *New Journal of Physics*, 23(6):063057, Jun 2021.
- [H4] Waldemar Kłobus, Wiesław Laskowski, Tomasz Paterek, Marcin Wieśniak, and Harald Weinfurter. Higher dimensional entanglement without correlations. *Eur. Phys. J. D*, 73:29, 2019.
- [H5] Waldemar Kłobus, Adam Burchardt, Adrian Kołodziejski, Mahasweta Pandit, Tamás Vértesi, Karol Życzkowski, and Wiesław Laskowski.  $k$ -uniform mixed states. *Phys. Rev. A*, 100:032112, Sep 2019.
- [H6] Waldemar Kłobus, Paweł Cieśliński, Lukas Knips, Paweł Kurzyński, and Wiesław Laskowski. Gaussian state entanglement witnessing through lossy compression. *Phys. Rev. A*, 103:032412, Mar 2021.
- [H7] Waldemar Kłobus, Paweł Kurzyński, Marek Kuś, Wiesław Laskowski, Robert Przybycień, and Karol Życzkowski. Transition from order to chaos in reduced quantum dynamics. *Phys. Rev. E*, 105:034201, Mar 2022.

## Referencje: publikacje aplikanta spoza cyklu habilitacyjnego

- [O1] Lukas Knips, Jan Dżiewior, Waldemar Kłobus, Wiesław Laskowski, Tomasz Paterek, Peter J. Shadbolt, Harald Weinfurter, and Jasmin D. A. Meinecke. Multipartite entanglement analysis from random correlations. *npj Quantum Inf.*, 6:51, 2020.

- [O2] Gilad Gour, Andrzej Grudka, Michał Horodecki, Waldemar Kłobus, Justyna Łodyga, and Varun Narasimhachar. Conditional uncertainty principle. *Phys. Rev. A*, 97:042130, Apr 2018.
- [O3] Karol Horodecki, Andrzej Grudka, Pankaj Joshi, Waldemar Kłobus, and Justyna Łodyga. Axiomatic approach to contextuality and nonlocality. *Phys. Rev. A*, 92:032104, Sep 2015.
- [O4] A. Grudka, K. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, P. Joshi, W. Kłobus, and A. Wójcik. Quantifying contextuality. *Phys. Rev. Lett.*, 112:120401, Mar 2014.
- [O5] K.J. Kapcia, W. Kłobus, and S. Robaszkiewicz. Some exact results for the zero-bandwidth extended hubbard model with intersite charge and magnetic interactions. *Acta Physica Polonica A*, 127(2):284–286, feb 2015.
- [O6] Konrad Jerzy Kapcia, Szymon Murawski, Waldemar Kłobus, and Stanisław Robaszkiewicz. Magnetic orderings and phase separations in a simple model of insulating systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 437:218–234, 2015.
- [O7] Waldemar Kłobus, Konrad Kapcia, and Stanisław Robaszkiewicz. Magnetic orderings and phase separations in the zero-bandwidth limit of the extended hubbard model with intersite magnetic interactions. *Acta. Phys. Pol. A*, 118:353, 2010.
- [O8] Konrad Kapcia, Waldemar Kłobus, and Stanisław Robaszkiewicz. Charge orderings and phase separations in the atomic limit of the extended hubbard model with intersite density-density interactions. *Acta. Phys. Pol. A*, 118:350, 2010.
- [O9] Konrad Kapcia, Waldemar Kłobus, and Stanisław Robaszkiewicz. Interplay between charge and magnetic orderings in the zero-bandwidth limit of the extended hubbard model for strong on-site repulsion. *Acta. Phys. Pol. A*, 121:1032, 2012.
- [O10] Waldemar Kłobus, Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, and Andrzej Grudka. Non-locality activation in entanglement-swapping chains. *Phys. Rev. A*, 86:020302, Aug 2012.
- [O11] Andrzej Grudka, Karol Horodecki, Michał Horodecki, Waldemar Kłobus, and Marcin Pawłowski. When are popescu-rohrlich boxes and random access codes equivalent? *Phys. Rev. Lett.*, 113:100401, Sep 2014.
- [O12] Andrzej Grudka, Michał Horodecki, Paweł Horodecki, Ryszard Horodecki, Waldemar Kłobus, and Łukasz Pankowski. Conjectured strong complementary-correlations tradeoff. *Phys. Rev. A*, 88:032106, Sep 2013.
- [O13] Waldemar Kłobus, Andrzej Grudka, Andreas Baumgartner, Damian Tomaszewski, Christian Schönerberger, and Jan Martinek. Entanglement witnessing and quantum cryptography with nonideal ferromagnetic detectors. *Phys. Rev. B*, 89:125404, Mar 2014.
- [O14] W. Kłobus D. Tomaszewski A. Grudka A. Baumgartner C. Schönerberger J. Martinek P. Rożek, P. Busz. Entanglement detection with non-ideal ferromagnetic detectors. *Acta. Phys. Pol. A*, 127:493, 2015.
- [O15] Waldemar Kłobus. Motion on a vertical loop with friction. *American Journal of Physics*, 79(9):913–918, 09 2011.
- [O16] Maciej Kasperski and Waldemar Kłobus. Rational and irrational numbers from unit resistors. *European Journal of Physics*, 35, 2013.
- [O17] Waldemar Kłobus, Andrzej Grudka, and Antoni Wójcik. Comment on “information flow of quantum states interacting with closed timelike curves”. *Phys. Rev. A*, 84:056301, Nov 2011.

## Referencje: pozostałe pozycje literaturowe

- [R1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [R2] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, Nov 1964.
- [R3] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969.
- [R4] Nicolas Gisin, Grégoire Ribordy, Wolfgang Tittel, and Hugo Zbinden. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, 74:145–195, Mar 2002.
- [R5] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, 409(6816):46–52, January 2001.
- [R6] P. W. Shor. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM J. Comput.*, 26:1484–1509, 1997.
- [R7] Lov K. Grover. Quantum computers can search arbitrarily large databases by a single query. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4709–4712, Dec 1997.
- [R8] Ll. Masanes, A. Acín, and N. Gisin. General properties of nonsignaling theories. *Phys. Rev. A*, 73:012112, Jan 2006.
- [R9] Jonathan Barrett. Information processing in generalized probabilistic theories. *Phys. Rev. A*, 75:032304, Mar 2007.
- [R10] Marcin Pawłowski and Āaslav Brukner. Monogamy of bell’s inequality violations in nonsignaling theories. *Phys. Rev. Lett.*, 102:030403, Jan 2009.
- [R11] R. Augusiak, M. Demianowicz, M. Pawłowski, J. Tura, and A. Acín. Elemental and tight monogamy relations in nonsignaling theories. *Phys. Rev. A*, 90:052323, Nov 2014.
- [R12] B. Toner. Monogamy of non-local quantum correlations. *Proc. R. Soc. A.*, 465:59–69, 2008.
- [R13] Jonathan Barrett, Lucien Hardy, and Adrian Kent. No signaling and quantum key distribution. *Phys. Rev. Lett.*, 95:010503, Jun 2005.
- [R14] Roger Colbeck and Renato Renner. Free randomness can be amplified. *Nature Physics*, 8(6):450–453, Jun 2012.
- [R15] Rodrigo Gallego, Lluís Masanes, Gonzalo De La Torre, Chirag Dhara, Leandro Aolita, and Antonio Acín. Full randomness from arbitrarily deterministic events. *Nature Communications*, 4(1):2654, Oct 2013.
- [R16] Ahmed Almheiri, Donald Marolf, Joseph Polchinski, and James Sully. Black holes: complementarity or firewalls? *Journal of High Energy Physics*, 2013(2):62, Feb 2013.
- [R17] Jonathan Oppenheim and Bill Unruh. Firewalls and flat mirrors: An alternative to the amps experiment which evades the harlow-hayden obstacle. *Journal of High Energy Physics*, 2014(3):120, Mar 2014.
- [R18] Seth Lloyd and John Preskill. Unitarity of black hole evaporation in final-state projection models. *Journal of High Energy Physics*, 2014(8):126, Aug 2014.

- [R19] Andrzej Grudka, Michael J. W. Hall, Michał Horodecki, Ryszard Horodecki, Jonathan Oppenheim, and John A. Smolin. Do black holes create polyamory? *Journal of High Energy Physics*, 2018(11):45, Nov 2018.
- [R20] Samuel L Braunstein and Carlton M Caves. Wringing out better bell inequalities. *Annals of Physics*, 202(1):22–56, 1990.
- [R21] W. Heisenberg. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3):172–198, Mar 1927.
- [R22] H. P. Robertson. The uncertainty principle. *Phys. Rev.*, 34:163–164, Jul 1929.
- [R23] Stephanie Wehner and Andreas Winter. Entropic uncertainty relations—a survey. *New Journal of Physics*, 12(2):025009, feb 2010.
- [R24] Masanao Ozawa. Universally valid reformulation of the heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. *Phys. Rev. A*, 67:042105, Apr 2003.
- [R25] Jacqueline Erhart, Stephan Sponar, Georg Sulyok, Gerald Badurek, Masanao Ozawa, and Yuji Hasegawa. Experimental demonstration of a universally valid error–disturbance uncertainty relation in spin measurements. *Nature Physics*, 8(3):185–189, Mar 2012.
- [R26] Christopher A. Fuchs and Asher Peres. Quantum-state disturbance versus information gain: Uncertainty relations for quantum information. *Phys. Rev. A*, 53:2038–2045, Apr 1996.
- [R27] Konrad Banaszek. Information gain versus state disturbance for a single qubit. *Open Systems & Information Dynamics*, 13(01):1–16, 2006.
- [R28] TJ Gawne and BJ Richmond. How independent are the messages carried by adjacent inferior temporal cortical neurons? *Journal of Neuroscience*, 13(7):2758–2771, 1993.
- [R29] Elad Schneidman, William Bialek, and Michael J. Berry II. Synergy, redundancy, and independence in population codes. *Journal of Neuroscience*, 23(37):11539–11553, 2003.
- [R30] Elad Schneidman, Susanne Still, Michael J. Berry, and William Bialek. Network information and connected correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 91:238701, Dec 2003.
- [R31] Vinay Varadan, III Miller, David M., and Dimitris Anastassiou. Computational inference of the molecular logic for synaptic connectivity in *C. elegans*. *Bioinformatics*, 22(14):e497–e506, 07 2006.
- [R32] Dimitris Anastassiou. Computational analysis of the synergy among multiple interacting genes. *Molecular Systems Biology*, 3(1):83, 2007.
- [R33] Paul L. Williams and Randall D. Beer. Nonnegative decomposition of multivariate information, 2010.
- [R34] D. L. Zhou. Irreducible multiparty correlations in quantum states without maximal rank. *Phys. Rev. Lett.*, 101:180505, Oct 2008.
- [R35] Gian Luca Giorgi, Bruno Bellomo, Fernando Galve, and Roberta Zambrini. Genuine quantum and classical correlations in multipartite systems. *Phys. Rev. Lett.*, 107:190501, Nov 2011.
- [R36] Davide Girolami, Tommaso Tufarelli, and Cristian E. Susa. Quantifying genuine multipartite correlations and their pattern complexity. *Phys. Rev. Lett.*, 119:140505, Oct 2017.

- [R37] Fernando G. S. L. Brandão, Aram W. Harrow, Jonathan Oppenheim, and Sergii Strelchuk. Quantum conditional mutual information, reconstructed states, and state redistribution. *Phys. Rev. Lett.*, 115:050501, Jul 2015.
- [R38] Igor Devetak and Jon Yard. Exact cost of redistributing multipartite quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 100:230501, Jun 2008.
- [R39] Jon T. Yard and Igor Devetak. Optimal quantum source coding with quantum side information at the encoder and decoder. *IEEE Transactions on Information Theory*, 55(11):5339–5351, 2009.
- [R40] Bei Zeng, Xie Chen, Duan-Lu Zhou, and Xiao-Gang Wen. Quantum information meets quantum matter – from quantum entanglement to topological phase in many-body systems, 2018.
- [R41] Matthias Christandl and Andreas Winter. “Squashed entanglement”: An additive entanglement measure. *Journal of Mathematical Physics*, 45(3):829–840, 02 2004.
- [R42] Chandrashekar Radhakrishnan, Mathieu Laurière, and Tim Byrnes. Multipartite generalization of quantum discord. *Phys. Rev. Lett.*, 124:110401, Mar 2020.
- [R43] Eneet Kaur, Xiaoting Wang, and Mark M. Wilde. Conditional mutual information and quantum steering. *Phys. Rev. A*, 96:022332, Aug 2017.
- [R44] Mario Berta, Fernando G. S. L. Brandão, Christian Majenz, and Mark M. Wilde. Conditional decoupling of quantum information. *Phys. Rev. Lett.*, 121:040504, Jul 2018.
- [R45] Kunal Sharma, Eyuri Wakakuwa, and Mark M. Wilde. Conditional quantum one-time pad. *Phys. Rev. Lett.*, 124:050503, Feb 2020.
- [R46] Charles H. Bennett, Andrzej Grudka, Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Postulates for measures of genuine multipartite correlations. *Phys. Rev. A*, 83:012312, Jan 2011.
- [R47] Mark Hillery, Vladimír Bužek, and André Berthiaume. Quantum secret sharing. *Phys. Rev. A*, 59:1829–1834, Mar 1999.
- [R48] Ali Saif M. Hassan and Pramod S. Joag. Experimentally accessible geometric measure for entanglement in  $N$ -qubit pure states. *Phys. Rev. A*, 77:062334, Jun 2008.
- [R49] Ali Saif M. Hassan and Pramod S. Joag. Geometric measure for entanglement in  $n$ -qudit pure states. *Phys. Rev. A*, 80:042302, Oct 2009.
- [R50] Minh Cong Tran, Borivoje Dakić, Fran çois Arnault, Wiesław Laskowski, and Tomasz Paterek. Quantum entanglement from random measurements. *Phys. Rev. A*, 92:050301, Nov 2015.
- [R51] Minh Cong Tran, Borivoje Dakić, Wiesław Laskowski, and Tomasz Paterek. Correlations between outcomes of random measurements. *Phys. Rev. A*, 94:042302, Oct 2016.
- [R52] Dagomir Kaszlikowski, Aditi Sen(De), Ujjwal Sen, Vlatko Vedral, and Andreas Winter. Quantum correlation without classical correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 101:070502, Aug 2008.
- [R53] Minh Cong Tran, Margherita Zuppardo, Anna de Rosier, Lukas Knips, Wiesław Laskowski, Tomasz Paterek, and Harald Weinfurter. Genuine  $n$ -partite entanglement without  $n$ -partite correlation functions. *Phys. Rev. A*, 95:062331, Jun 2017.



- [R54] Christian Schwemmer, Lukas Knips, Minh Cong Tran, Anna de Rosier, Wiesław Laskowski, Tomasz Paterek, and Harald Weinfurter. Genuine multipartite entanglement without multipartite correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 114:180501, May 2015.
- [R55] N Gisin and H Bechmann-Pasquinucci. Bell inequality, bell states and maximally entangled states for n qubits. *Physics Letters A*, 246(1):1–6, 1998.
- [R56] A Borrás, A R Plastino, J Batle, C Zander, M Casas, and A Plastino. Multiqubit systems: highly entangled states and entanglement distribution. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(44):13407, oct 2007.
- [R57] A. Higuchi and A. Sudbery. How entangled can two couples get? *Physics Letters A*, 273(4):213–217, 2000.
- [R58] Felix Huber, Otfried Gühne, and Jens Siewert. Absolutely maximally entangled states of seven qubits do not exist. *Phys. Rev. Lett.*, 118:200502, May 2017.
- [R59] Wolfram Helwig and Wei Cui. Absolutely maximally entangled states: Existence and applications, 2013.
- [R60] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Jun 2009.
- [R61] Otfried Gühne and Géza Tóth. Entanglement detection. *Physics Reports*, 474(1):1–75, 2009.
- [R62] Dawei Lu, Tao Xin, Nengkun Yu, Zhengfeng Ji, Jianxin Chen, Guilu Long, Jonathan Baugh, Xinhua Peng, Bei Zeng, and Raymond Laflamme. Tomography is necessary for universal entanglement detection with single-copy observables. *Phys. Rev. Lett.*, 116:230501, Jun 2016.
- [R63] Luca D’Alessio, Yariv Kafri, Anatoli Polkovnikov, and Marcos Rigol. From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Advances in Physics*, 65(3):239–362, 2016.
- [R64] F. Haake, M. Kuś, and R. Scharf. Classical and quantum chaos for a kicked top. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 65(3):381–395, Sep 1987.
- [R65] S. Chaudhury, A. Smith, B. E. Anderson, S. Ghose, and P. S. Jessen. Quantum signatures of chaos in a kicked top. *Nature*, 461(7265):768–771, Oct 2009.
- [R66] V. R. Krithika, V. S. Anjusha, Udaysinh T. Bhosale, and T. S. Mahesh. Nmr studies of quantum chaos in a two-qubit kicked top. *Phys. Rev. E*, 99:032219, Mar 2019.
- [R67] Jayendra N. Bandyopadhyay and Arul Lakshminarayan. Entanglement production in coupled chaotic systems: Case of the kicked tops. *Phys. Rev. E*, 69:016201, Jan 2004.
- [R68] Rafał Demkowicz-Dobrzański and Marek Kuś. Global entangling properties of the coupled kicked tops. *Phys. Rev. E*, 70:066216, Dec 2004.
- [R69] Collin M. Trail, Vaibhav Madhok, and Ivan H. Deutsch. Entanglement and the generation of random states in the quantum chaotic dynamics of kicked coupled tops. *Phys. Rev. E*, 78:046211, Oct 2008.
- [R70] Angelo Piga, Maciej Lewenstein, and James Q. Quach. Quantum chaos and entanglement in ergodic and nonergodic systems. *Phys. Rev. E*, 99:032213, Mar 2019.

- [R71] Mitchell J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, Jul 1978.
- [R72] Michał Horodecki, Jonathan Oppenheim, and Andreas Winter. Partial quantum information. *Nature*, 436(7051):673–676, Aug 2005.
- [R73] Remigiusz Augusiak and Paweł Horodecki. Bound entanglement maximally violating bell inequalities: Quantum entanglement is not fully equivalent to cryptographic security. *Phys. Rev. A*, 74:010305, Jul 2006.
- [R74] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral, and Mark Williamson. Unified view of quantum and classical correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 104:080501, Feb 2010.
- [R75] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 88:017901, Dec 2001.
- [R76] LUCAS C. CÉLERI, JONAS MAZIERO, and ROBERTO M. SERRA. Theoretical and experimental aspects of quantum discord and related measures. *International Journal of Quantum Information*, 09(07n08):1837–1873, 2011.
- [R77] N. J. Cerf, C. Adami, and R. M. Gingrich. Reduction criterion for separability. *Phys. Rev. A*, 60:898–909, Aug 1999.
- [R78] Philipp Hyllus, Otfried Gühne, and Augusto Smerzi. Not all pure entangled states are useful for sub-shot-noise interferometry. *Phys. Rev. A*, 82:012337, Jul 2010.
- [R79] Damian Markham and Barry C. Sanders. Graph states for quantum secret sharing. *Phys. Rev. A*, 78:042309, Oct 2008.
- [R80] Adrian Keet, Ben Fortescue, Damian Markham, and Barry C. Sanders. Quantum secret sharing with qudit graph states. *Phys. Rev. A*, 82:062315, Dec 2010.
- [R81] Bastian Jungnitsch, Tobias Moroder, and Otfried Gühne. Taming multiparticle entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 106:190502, May 2011.
- [R82] Jacek Gruca, Wiesław Laskowski, Marek Żukowski, Nikolai Kiesel, Witlef Wieczorek, Christian Schmid, and Harald Weinfurter. Nonclassicality thresholds for multiqubit states: Numerical analysis. *Phys. Rev. A*, 82:012118, Jul 2010.
- [R83] Anna de Rosier, Jacek Gruca, Fernando Parisio, Tamás Vértesi, and Wiesław Laskowski. Multipartite nonlocality and random measurements. *Phys. Rev. A*, 96:012101, Jul 2017.
- [R84] Remigiusz Augusiak and Paweł Horodecki. Generalized smolin states and their properties. *Phys. Rev. A*, 73:012318, Jan 2006.
- [R85] E.M. Rains. Nonbinary quantum codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(6):1827–1832, 1999.
- [R86] Dardo Goyeneche, Daniel Alsina, José I. Latorre, Arnau Riera, and Karol Życzkowski. Absolutely maximally entangled states, combinatorial designs, and multiunitary matrices. *Phys. Rev. A*, 92:032316, Sep 2015.
- [R87] C. Radhakrishna Rao. Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 9(1):128–139, 1947.
- [R88] Christian Weedbrook, Stefano Pirandola, Raúl García-Patrón, Nicolas J. Cerf, Timothy C. Ralph, Jeffrey H. Shapiro, and Seth Lloyd. Gaussian quantum information. *Rev. Mod. Phys.*, 84:621–669, May 2012.

- [R89] Ludovico Lami, Alessio Serafini, and Gerardo Adesso. Gaussian entanglement revisited. *New Journal of Physics*, 20(2):023030, feb 2018.
- [R90] C. K. Law. Quantum entanglement as an interpretation of bosonic character in composite two-particle systems. *Phys. Rev. A*, 71:034306, Mar 2005.
- [R91] R. Simon. Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2726–2729, Mar 2000.
- [R92] R. W. Rendell and A. K. Rajagopal. Entanglement of pure two-mode gaussian states. *Phys. Rev. A*, 72:012330, Jul 2005.
- [R93] Shmuel Friedland, Vlad Gheorghiu, and Gilad Gour. Universal uncertainty relations. *Phys. Rev. Lett.*, 111:230401, Dec 2013.
- [R94] Michael J. W. Hall. Information exclusion principle for complementary observables. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3307–3311, Apr 1995.
- [R95] Hans Maassen and J. B. M. Uffink. Generalized entropic uncertainty relations. *Phys. Rev. Lett.*, 60:1103–1106, Mar 1988.
- [R96] David Deutsch. Quantum mechanics near closed timelike lines. *Phys. Rev. D*, 44:3197–3217, Nov 1991.
- [R97] T. C. Ralph and C. R. Myers. Information flow of quantum states interacting with closed timelike curves. *Phys. Rev. A*, 82:062330, Dec 2010.

(podpis wnioskodawcy)