

## AUTOREFERAT

### 1. Imię i nazwisko

BARBARA WOLNIK

### 2. Posiadane dyplomy, stopnie nauowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

- dyplom magistra matematyki: Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Wrocławskiego, 1990, tytuł pracy: „Reprezentacje grup związanych z pewnymi operatorami Schrödingera”, promotor: prof. Andrzej Hulanicki;
- stopień naukowy doktora matematyki: Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Gdańskiego, 2000, tytuł rozprawy: „O pewnej klasie baz w przestrzeniach funkcyjnych” promotor: prof. Anna Kamont.

### 3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- 1990 – 1991 – asystent stażysta, Uniwersytet Wrocławski, Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii
- 1991 – 2000 – asystent, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki (w roku akademickim 1992/1993 urlop macierzyński)
- 2000 – 2012 – adiunkt, Uniwersytet Gdański (w roku akademickim 2001/2002 urlop macierzyński)
- 2012 – 2017 – starszy wykładowca, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
- od 2017 – adiunkt, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

### 4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

#### 4.1 Moje główne osiągnięcie

Głównym osiągnięciem, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.) jest cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem:

#### **„Wielowymiarowe automaty komórkowe z sąsiedztwem von Neumanna zachowujące sumę stanów”**

Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

- [H1] Barbara Wolnik, Adam Dzedzej, Jan M. Baetens, Bernard De Baets  
*Number-conserving cellular automata with a von Neumann neighborhood of range one*  
Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, vol. 50, nr 43, 2017, 435101 (19 stron),  
DOI:10.1088/1751-8121/aa89cf, 30 punktów, IF(1,963)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie twierdzenia wraz z dowodami w Sekcji 4. Pozostałe wyniki (Sekcja 3) są efektem wspólnej pracy. Wspólna jest także praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

- [H2] Barbara Wolnik, Anna Nenca, Jan M. Baetens, Bernard De Baets  
*A split-and-perturb decomposition of number-conserving cellular automata*  
Physica D-Nonlinear Phenomena, vol. 413, 2020, 132645 (12 stron),  
DOI:10.1016/j.physd.2020.132645, 100 punktów, IF(1,807)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie twierdzenia wraz z dowodami. Wspólna praca dotyczyła przedstawionych w artykule zastosowań, w szczególności tych wymagających zaawansowanych symulacji komputerowych. Wspólna jest również praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

[H3] Barbara Wolnik, Bernard De Baets

*All binary number-conserving cellular automata based on adjacent cells are intrinsically one-dimensional*  
Physical Review E, vol. 100, nr 2, 2019, 022126 (6 stron),  
DOI:10.1103/PhysRevE.100.022126, 140 punktów, IF(2,296)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie twierdzenia wraz z dowodami w Sekcjach 2 i 3. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

[H4] Barbara Wolnik, Bernard De Baets

*Ternary reversible number-conserving cellular automata are trivial*  
Information Sciences, Elsevier Inc., vol. 513, 2020, s. 180-189,  
DOI:10.1016/j.ins.2019.10.068, 200 punktów, IF(5,91)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie twierdzenia wraz z dowodami w Sekcjach 2 i 3. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

[H5] Adam Dzedzej, Barbara Wolnik, Anna Nenca, Jan M. Baetens, Bernard De Baets

*Efficient enumeration of three-state two-dimensional number-conserving cellular automata*  
Information and Computation, vol. 274, 2020, 104534 (14 stron),  
DOI:10.1016/j.ic.2020.104534, 70 punktów, IF(0,872)

*W tej pracy mojego autorstwa jest Twierdzenie 3.1 wraz z dowodem. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

[H6] Adam Dzedzej, Barbara Wolnik, Maciej Dziemiańczuk, Anna Nenca, Jan M. Baetens, Bernard De Baets

*A two-layer representation of four-state reversible number-conserving 2D cellular automata*  
Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment, vol. 2019, 2019, 073202 (17 stron),  
DOI:10.1088/1742-5468/ab25df, 70 punktów, IF(2,215)

*Praca ta powstała jako wynik wspólnych dyskusji. W tej pracy mojego autorstwa jest teoretyczny background w Sekcji 4 (bez algorytmów). Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

[H7] Barbara Wolnik, Nikodem Mrożek, Adam Dzedzej, Bernard De Baets

*Three-dimensional rotation-symmetric number-conserving cellular automata*  
Journal of Cellular Automata, vol. 15, nr 4, 2020, s. 243-259, 40 punktów, IF(0,596)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. Wspólna jest praca nad wszystkimi wynikami w Sekcji 3 i 4 (mój wkład oceniam na co najmniej 50%). Wspólna jest także praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

[H8] Adam Dzedzej, Barbara Wolnik, Anna Nenca, Jan M. Baetens, Bernard De Baets

*Two-dimensional rotation-symmetric number-conserving cellular automata*  
Information Sciences, Elsevier Inc., vol. 577, 2021, s. 599-621,  
DOI:10.1016/j.ins.2021.06.041, 200 punktów, IF(5,91)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie twierdzenia wraz z dowodami w Sekcji 3 oraz w Appendix. Wspólna jest praca nad pozostałymi wynikami oraz nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

## Zarys tematu badań

Ogólnie mówiąc, moja praca badawcza dotyczy automatów komórkowych (CA), tj. dyskretnych układów dynamicznych składających się z regularnej siatki komórek, które w kolejnych krokach czasowych aktualizują swoje stany w zależności od stanów swoich sąsiadów, zgodnie z zadaną regułą lokalną.

Kiedy Ulam i von Neumann wprowadzili automaty komórkowe, byli motywowani przez zastosowania biologiczne i chcieli stworzyć samoreplikującą się maszynę, która mogłaby być analogiczna do ludzkiego mózgu i być uniwersalna obliczeniowo [1, 2]. Później CA stały się interesujące jako modele złożonych zjawisk w różnych dziedzinach badań, takich jak biologia [3], nauki o środowisku [4], materiałoznawstwo [5], dynamika pieszych [6], transport miejski [7], hydrologia [8] i rolnictwo [9], by wymienić tylko kilka. Popularność ta wynika z faktu, że CA odzwierciedlają założenie, że wszystkie prawa (fizyczne, ekonomiczne, socjologiczne itd.) muszą wynikać z interakcji, które są ściśle lokalne.

Bardziej formalnie,  $d$ -wymiarowy automat komórkowy (CA) jest czwórka  $(\mathcal{C}, Q, V, f)$ , gdzie

- $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}^d$  jest przestrzenią komórek;
- $Q$  jest skończonym zbiorem stanów, przy czym zakładamy, że stany są reprezentowane przez liczby;

- $V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$  jest wektorem zadającym sąsiedztwo, co oznacza, że dla dowolnej komórki  $\mathbf{i} \in \mathcal{C}$  komórki  $\mathbf{i} + \vec{v}_1, \mathbf{i} + \vec{v}_2, \dots, \mathbf{i} + \vec{v}_m$  są jej sąsiadkami;
- $f : Q^m \rightarrow Q$  jest regułą lokalną: nowy stan komórki  $\mathbf{i}$  jest dany poprzez  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , gdzie  $x_1, x_2, \dots, x_m$  odpowiednio są obecnymi stanami komórek  $\mathbf{i} + \vec{v}_1, \mathbf{i} + \vec{v}_2, \dots, \mathbf{i} + \vec{v}_m$ .

Najczęściej przestrzeń komórkowa równa się całej przestrzeni  $\mathbb{Z}^d$  lub jakiejś prostopadłościenniej siatce komórek z okresowymi warunkami brzegowymi, tj.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/n_d\mathbb{Z}) \\ &= \{0, 1, \dots, n_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, n_d - 1\}. \end{aligned}$$

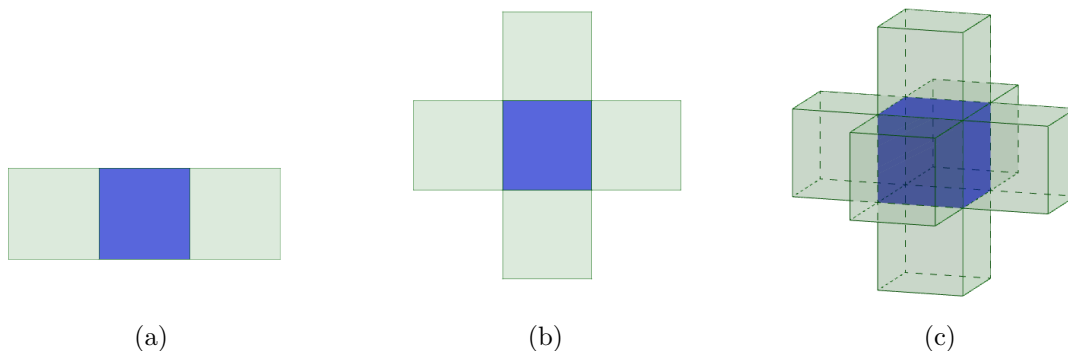
Jeśli chodzi o sąsiedztwo, istnieją dwa najczęściej używane typy sąsiedztwa: sąsiedztwo Moore'a i sąsiedztwo von Neumanna. Różnią się tym, która metryka jest brana pod uwagę w  $\mathbb{Z}^d$ : sąsiedztwo Moore'a jest określone przez odległość Czebyszewa

$$\text{dist}_{Ch}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \max_{1 \leq k \leq d} |i_k - j_k|, \quad (1)$$

podczas gdy sąsiedztwo von Neumanna można opisać za pomocą metryki Manhattan:

$$\text{dist}_M(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \sum_{k=1}^d |i_k - j_k|, \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathcal{C}$  oraz  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_d) \in \mathcal{C}$ . Z tego punktu widzenia wspomniane sąsiedztwa komórki  $\mathbf{i}$  można zdefiniować jako domknięte kule jednostkowe o środku w  $\mathbf{i}$ , tj. sąsiedztwo składa się z tych komórek, których odległość (Czebyszewa lub Manhattan) od  $\mathbf{i}$  jest nie większa niż 1. Podczas gdy sąsiedztwo Moore'a ma bardzo prostą strukturę (każda kula jest  $d$ -wymiarowym sześcianem), sąsiedztwo von Neumanna jest znacznie ciekawszym i trudniejszym do zbadania obiektem. Na przykład sąsiedztwo von Neumanna w przypadku jedno-, dwu- i trójwymiarowej siatki pokazano na Rys. 1. Od teraz zakładamy, że rozważamy tylko sąsiedztwo von Neumanna.



Rysunek 1: Sąsiedztwo von Neumann w przypadku (a)  $d = 1$  (b)  $d = 2$  (c)  $d = 3$ .

Przez *konfigurację* rozumiemy dowolne odwzorowanie z siatki  $\mathcal{C}$  w  $Q$ , a zbiór wszystkich konfiguracji oznaczamy przez  $X = Q^{\mathcal{C}}$ . Jeśli  $|\mathcal{C}| < +\infty$ , to dla danej konfiguracji  $\mathbf{x} \in X$  jej gęstość jest zdefiniowana jako:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sigma(\mathbf{x}), \quad \text{gdzie} \quad \sigma(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{C}} \mathbf{x}(\mathbf{i}).$$

Przez *konfigurację sąsiedztwa* rozumiemy dowolną funkcję  $N : V \rightarrow Q$ . Zbiór wszystkich możliwych konfiguracji sąsiedztwa jest oznaczony przez  $\mathcal{N}$ . W przypadku sąsiedztwa von Neumanna zbiór  $V$  ma  $2d + 1$  elementów, a mianowicie  $-\vec{v}_d, \dots, -\vec{v}_1, \vec{0}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$ , gdzie  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$  jest bazą standardową. Zatem w tym przypadku możemy zdefiniować każdą konfigurację sąsiedztwa za pomocą ciągu

$$N(-\vec{v}_d), \dots, N(-\vec{v}_1), N(\vec{0}), N(\vec{v}_1), \dots, N(\vec{v}_d)$$

(często bez przecinków, o ile nie prowadzi to do nieporozumień). W przypadku dwuwymiarowym wygodniej jest reprezentować  $N$  graficznie jako  $q_2 \overset{q_1}{q_3} q_4$ , gdzie  $N(\vec{0}) = q_3$ ,  $N(\vec{v}_1) = q_4$ ,  $N(-\vec{v}_1) = q_2$ ,  $N(\vec{v}_2) = q_1$  oraz  $N(-\vec{v}_2) = q_5$ . Korzystając z tej notacji, zbiór  $\mathcal{N}$  można wyrazić jako:

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \ q_3 \ q_4 \\ q_5 \end{array} \mid q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \in Q \right\}.$$

Analogicznie, dla  $d = 3$ , piszemy  $q_2 q_3 q_4, q_1 q_7$ , gdzie  $N(\vec{0}) = q_3, N(\vec{v}_1) = q_4, N(-\vec{v}_1) = q_2, N(\vec{v}_2) = q_1, N(-\vec{v}_2) = q_5,$   
 $q_6 q_5$   
 $N(\vec{v}_3) = q_6$  oraz  $N(-\vec{v}_3) = q_7$ .

Jeśli  $\mathbf{x} \in X$  i  $\mathbf{i} \in \mathcal{C}$  są dane, to  $N_{\mathbf{x},\mathbf{i}}$  oznacza konfigurację sąsiedztwa von Neumanna komórki  $\mathbf{i}$  w konfiguracji  $\mathbf{x}$ , tj.  $N_{\mathbf{x},\mathbf{i}}(\vec{v}) = \mathbf{x}(\mathbf{i} + \vec{v})$ , dla każdego  $\vec{v} \in V$ .

Każda funkcja  $f: \mathcal{N} \rightarrow Q$  jest nazywana *regułą lokalną*. Każda reguła lokalna  $f$  indukuje *regułę globalną*  $A_f: X \rightarrow X$  zdefiniowaną dla  $\mathbf{x} \in X$  i  $\mathbf{i} \in \mathcal{C}$  w następujący sposób

$$A_f(\mathbf{x})(\mathbf{i}) = f(N_{\mathbf{x},\mathbf{i}}).$$

Regułę globalną  $A_f$  utożsamiamy z automatem komórkowym.

W swoich badaniach skupiam się na  $d$ -wymiarowych CA, które mają dwie ważne (z punktu widzenia zastosowań) właściwości. Pierwszą z nich jest zachowanie sumy stanów, co oznacza, że suma wszystkich stanów w dowolnej konfiguracji pozostaje stała w trakcie ewolucji automatu. W przypadku gdy zbiór  $\mathcal{C}$  jest skończony stosuje się następującą definicję:

**Definicja 1** *Reguła lokalna  $f$  zachowuje sumę stanów (mówimy, że jest "number-conserving"), jeśli odpowiadająca jej reguła globalna  $A_f$  zachowuje gęstość. Innymi słowy,  $\rho(A_f(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x})$  zachodzi dla każdej konfiguracji  $\mathbf{x} \in X$ . Równoważnie, ten warunek można wyrazić jako  $\sigma(A_f(\mathbf{x})) = \sigma(\mathbf{x})$ .*

Zwróćmy uwagę, że jeśli zbiór stanów zawiera nie tylko liczby naturalne, to preferowany jest raczej termin *density-conserving*.

Drugą własnością CA, którą jestem zainteresowana w mojej pracy badawczej, jest odwracalność. Dzięki pracy Hedlunda [10] pojęcie to można zdefiniować na kilka sposobów, ale dla moich celów najbardziej przydatna jest następująca definicja:

**Definicja 2** *Niech  $f$  będzie regułą lokalną pewnego  $d$ -wymiarowego CA. Mówimy, że ten CA jest odwracalny, jeśli funkcja  $A_f$  jest iniekcją.*

W ostatnich latach naukowcy coraz chętniej wykorzystują wielowymiarowe CA. W szczególności wydają się być one odpowiednim narzędziem do modelowania zjawisk fizycznych, zwłaszcza jako model układu oddziałujących cząstek poruszających się w sieci [11–13] a np. w [14] przedstawiono interpretację mechaniki kwantowej opartą na wielowymiarowych CA.

Niestety wraz ze wzrostem wymiarów zbiór wszystkich CA szybko się rozrasta. W konsekwencji konwencjonalne metody, takie jak przeszukiwanie całego zbioru w celu znalezienia interesujących nas CA, nie mają już zastosowania. Dlatego opracowanie nowych narzędzi dla wielowymiarowych CA stało się sprawą najwyższej wagi.

Aby uwzględnić prawa zachowania, będące kluczowym wymogiem w fizyce, wiele modeli opiera się na określonym typie automatów komórkowych, a mianowicie takich, które mają specjalną cechę zachowania ustalonego niezmiennika. Najczęściej są to właśnie CA zachowujące sumę stanów przy każdej aktualizacji wszystkich komórek. Takie CA, zwane, jak już było wspomniane, "number-conserving" i oznaczane NCCA (lub "density-conserving", gdy dozwolone są stany niecałkowite), spotkały się z dużym zainteresowaniem, zwłaszcza, jak wspomniano powyżej, jako modele układów cząstek, które oddziałują i poruszają się wzdłuż jakiejś predefiniowanej sieci: pojawiają się w naturalnym kontekście przepływu gazu lub płynu [15, 16] czy ruchu drogowego [17–20].

Sąsiedztwo von Neumanna jest naturalnym wyborem podczas modelowania zjawisk fizycznych (na przykład jest to „najczęściej spotykane w modelach przepływów lądowych” [8]). Niestety badanie wielowymiarowych CA z tego rodzaju sąsiedztwem jest bardzo skomplikowane, ponieważ nie jest ono iloczynem kartezjańskim jednowymiarowych sąsiedztw (w przeciwieństwie do sąsiedztwa Moore’a). Z tego powodu problem zachowania sumy stanów w  $d$ -wymiarowych CA z sąsiedztwem von Neumanna, dla  $d > 1$ , długo pozostawał słabo zbadany.

Oczywiście dla konkretnego CA nie są potrzebne nowe narzędzia do określenia, czy zachowuje on sumę stanów, czy nie. Boccara i Fukś [21] podali warunki konieczne i dostateczne, aby jednowymiarowy CA był NCCA. Podobnie Durand i in. [22] podali takie warunki dla dwóch lub więcej wymiarów. W tej ostatniej pracy rozważano sąsiedztwo Moore’a, więc wyniki można wykorzystać również dla sąsiedztwa von Neumanna. Jeśli jednak chce się znaleźć wszystkie NCCA dla danych  $d$  i  $Q$ , zazwyczaj niemożliwe jest sprawdzenie wszystkich CA w celu znalezienia tych, które zachowują sumę stanów, ze względu na ogromną liczbę elementów przestrzeni przeszukiwania. W szczególności, nie jest wskazane traktowanie sąsiedztwa von Neumanna jako podzbioru sąsiedztwa Moore’a, ponieważ pierwsze ma tylko  $2d + 1$  komórek, podczas gdy drugie ma aż  $3^d$  komórek.

Ponieważ NCCA często pojawiają się przy modelowaniu układów trwałych cząstek, poruszających się według pewnych reguł, kilku badaczy podjęło próbę reprezentacji NCCA w kategoriach ruchu cząstek. W przypadku jednowymiarowym problemem tym zajmowali się Boccara i Fukś [21], Pivato [23] oraz Moreira i in. [12]. Kari

i Taati [24] pokazali, że również dynamika dwuwymiarowych NCCA może być opisana w kategoriach ruchów cząstek.

Tanimoto i Imai [25] podali charakterystykę dwuwymiarowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna w terminach tak zwanych *funkcji przepływu* zdefiniowanych wzdłuż trzech kierunków (pionowego, poziomego i ukośnego). Taka charakterystyka pozwala na tworzenie dwuwymiarowych NCCA. Niestety, ze względu na złożoność obliczeniową, wykorzystanie tych przepływów do znalezienia wszystkich dwuwymiarowych NCCA, nawet w prostym przypadku  $Q = \{0, 1, 2\}$ , nie jest możliwe. Jednakże, używając funkcji przepływu, Tanimoto i Imai zdołali opisać wszystkie dwuwymiarowe pięciostanowe NCCA z sąsiedztwem von Neumanna, które są rotacyjnie symetryczne, tj., są niezienne przy obrocie sąsiedztwa o 90 stopni [26]. Wyniki przedstawione w [25, 26] dotyczą tylko  $d = 2$ , a użyte w nich idee, w szczególności funkcje przepływu, nie zostały przeniesione do wyższych wymiarów. Nawet gdybyśmy mogli użyć podobnych narzędzi dla  $d > 2$ , wyniki nie miałyby żadnej praktycznej wartości, gdyż użycie ich do znalezienia wszystkich NCCA wymagałoby mocy obliczeniowej wykraczającej poza obecne możliwości techniczne.

Warto podkreślić, że z teoretycznego punktu widzenia najciekawszy jest przypadek  $\mathcal{C} = \mathbb{Z}^d$ , ale jeśli chcemy móc symulować automaty komórkowe za pomocą komputerów, musimy ograniczyć się do przypadku krat skończonych (zwykle z okresowymi warunkami brzegowymi, ale nie tylko). Ponieważ dla danej reguły lokalnej właściwości automatu komórkowego rozpatrywanego na kratkach skończonych mogą być zupełnie inne niż na kracie nieskończonej, należy pamiętać, że eksperymenty przeprowadzane przez komputery mogą czasem wprowadzać w błąd. Dlatego tak ważne jest rozwijanie matematycznych narzędzi teoretycznych (czym właśnie zajmuję się w mojej pracy badawczej).

## Opis mojego głównego osiągnięcia

W serii prac [H1 - H8] badam  $d$ -wymiarowe NCCA z sąsiedztwem von Neumanna, gdzie  $d$  jest dodatnią liczbą całkowitą większą od 1. Prace [H1 - H4] dotyczą teorii dla ogólnego  $d$ , natomiast prace [H5 - H8] zawierają wyniki pewnych szczególnych badań dla  $d = 2$  lub  $d = 3$ . Poniżej przedstawiam szczegółowy opis każdego artykułu.

### [H1]

Pierwsze wyniki moich starań o znalezienie wygodnej charakteryzacji wielowymiarowych automatów komórkowych z sąsiedztwem von Neumanna, które zachowują sumę stanów, zostały przedstawione w artykule “*Number-conserving cellular automata with a von Neumann neighborhood of range one*” [27]. Używając nowego podejścia opartego na analizie geometrycznych własności sąsiedztwa von Neumanna w wyższych wymiarach, udało mi się znaleźć warunek konieczny i dostateczny dla CA na zachowywanie sumy stanów, sformułowany w języku reguły lokalnej, w podobny sposób jak zrobili to Boccara i Fukś w przypadku jednowymiarowym [21]. Co więcej, warunki te dotyczą dowolnego zbioru stanów  $Q \subset \mathbb{R}$ , niezależnie od tego, czy jest on skończony, czy nie.

Głównym pomysłem było zredukowanie zapisu warunku do najprostszych możliwych konfiguracji sąsiedztwa: *monomerów*  $M$  i *dimerów*  $D$ , czyli do funkcji  $M_{\vec{v}:q}$  oraz  $D_{\vec{u}:p, \vec{w}:q}$  danych wzorami:

$$M_{\vec{v}:q}(\vec{u}) = \begin{cases} q & , \text{ jeśli } \vec{u} = \vec{v} \\ 0 & , \text{ jeśli } \vec{u} \neq \vec{v} \end{cases} \quad D_{\vec{u}:p, \vec{w}:q}(\vec{v}) = \begin{cases} p & , \text{ jeśli } \vec{v} = \vec{u} \\ q & , \text{ jeśli } \vec{v} = \vec{w} \\ 0 & , \text{ poza tym} \end{cases} .$$

Najważniejszy wynik tej pracy stwierdza, że CA z sąsiedztwem von Neumanna zachowuje sumę stanów wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej konfiguracji sąsiedztwa  $N$  zachodzi

$$\begin{aligned} f(N) = N(\vec{\eta}) + \sum_{(\vec{u}, \vec{w}) \in \Lambda} \left[ f \left( D_{\vec{u}:N(\vec{u}), \vec{w}:N(\vec{w})} \right) - f \left( D_{\vec{u}:N(-\vec{w}), \vec{w}:N(-\vec{u})} \right) \right] \\ - \sum_{(\vec{u}, \vec{w}) \in \Lambda} \left[ f^E \left( D_{\vec{u}:N(\vec{u}), \vec{w}:N(\vec{w})} \right) + f^E \left( D_{-\vec{u}:N(\vec{w}), -\vec{w}:N(\vec{u})} \right) \right] \\ + \sum_{\vec{v} \in V \setminus \{\vec{\eta}\}} f^E \left( H_N(\vec{v}) \right) - \sum_{\vec{v} \in V_+} f \left( M_{\vec{v}:N(-\vec{v})} \right) , \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie

- $\Lambda \subset V \times V$  jest pewnym wybranym skończonym zbiorem par kierunków (bardzo łatwym do opisania);

- rozwinięcie monomerowe (*monomer expansion*)  $f^E: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  reguły lokalnej  $f$  definiuje się następująco:

$$f^E(N) = \sum_{\vec{v} \in V} f(M_{\vec{v}:N(\vec{v})});$$

- dla danego  $q \in Q$ ,  $H_q$  oznacza jednorodną konfigurację sąsiedztwa, tzn. dla każdego  $\vec{v} \in V$  mamy  $H_q(\vec{v}) = q$ .

Chociaż formuła ta jest dość długa, jest znacznie prostsza niż warunki przedstawiane przez innych autorów (por. [22] i [25]). Największą zaletą tego wzoru jest to, że jego postać pozwala nie tylko rozstrzygnąć, czy dana reguła zachowuje sumę stanów, ale także wyliczyć wszystkie reguły zachowujące sumę stanów dla niezbyt dużego  $d$  i małego  $|Q|$ . Wynika to z faktu, że nie musimy rozważać każdej reguły z ogromnego zbioru  $|Q|^{|Q|^{2d+1}}$  możliwych reguł lokalnych jedna po drugiej, ale potrzebujemy tylko ustalić wartości dla co najwyżej  $(2d+1) \cdot (|Q|-1)$  monomerów i  $d^2(|Q|-1)^2$  dimerów, a następnie sprawdzić, czy wartości obliczone zgodnie z równaniem (3) należą do  $Q$ . Na przykład, mogliśmy go użyć, aby dowiedzieć się, że jeśli  $d=3$ , to jest tylko 13 reguł binarnych zachowujących sumę stanów, a mianowicie: identyczność, 6 shiftów i 6 reguł typu traffic (w każdym z możliwych kierunków: prawo, lewo, góra, dół, przód i tył). Należy zauważyć, że wszystkie te reguły są w pewnym sensie trywialne, ponieważ można je traktować jako jednowymiarowe reguły działające na rozłącznych "paskach" komórek (uogólnienie tego wyniku zawarte jest w [H3]). Główny wynik przedstawiony w [H1] pozwolił również znaleźć wszystkie dwuwymiarowe trójstanowe NCCA (patrz [H6]) oraz opisać wszystkie afiniczne ciągle CA zachowujące gęstość z nieskończonym zbiorem stanów  $Q = [0, 1]$  (patrz [28]).

Dodatkowo formuła (3) ma jeszcze jedną ważną zaletę: dla danego  $d$  istnieją dokładnie  $(2d+1) \cdot 2^{d^2}$  możliwe sformułowania tego warunku koniecznego i wystarczającego. Dzieje się tak, ponieważ istnieją  $2d+1$  możliwości wyboru składnika wiodącego  $\vec{7}$  i  $2^{d^2}$  możliwości wyboru  $\mathbf{\Lambda}$ . Chociaż wszystkie są równoważne, otrzymane wzory mogą różnić się liczbą wyrazów. Na przykład dla  $d=2$  formułę (3) można zapisać na 80 różnych sposobów, a najkrótszy z nich to:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \ q_3 \ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} &= q_1 + f \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \ 0 \ 0 \\ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \ 0 \ 0 \\ q_4 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ q_3 \ q_4 \\ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ q_2 \ q_3 \\ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ q_3 \ 0 \\ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ q_1 \ 0 \\ q_3 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ q_2 \ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ q_3 \ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ q_3 \\ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ q_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_3 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_4 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_1 \end{pmatrix} - 2f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Wzory analogiczne do (4), ale dla przypadku  $d=3$  są nieco bardziej skomplikowane i prawa strona najkrótszego wyrażenia ma aż 38 składników.

**Twierdzenie 3** *Rozważmy wymiar  $d=3$ . Reguła lokalna  $f$  zachowuje sumę stanów wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7 \in Q$ , zachodzi*

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} q_1 \ q_7 \\ q_2 \ q_3 \ q_4 \\ q_6 \ q_5 \end{pmatrix} &= q_1 + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_4 \\ 0 \ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_1 \\ 0 \ q_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ q_3 \ 0 \\ 0 \ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ q_1 \ 0 \\ 0 \ q_3 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ q_2 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ q_1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_4 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_6 \ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_1 \ q_7 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ q_7 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_5 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ q_1 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_6 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ q_7 \\ 0 \ 0 \ q_4 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ q_2 \\ 0 \ 0 \ q_6 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \ q_7 \\ 0 \ q_3 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ q_3 \\ 0 \ q_6 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_4 \\ q_6 \ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_7 \\ q_2 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ q_3 \ q_4 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ q_2 \ q_3 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ q_2 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ q_6 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} - 2f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ q_3 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_3 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_6 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_7 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} - 3f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ q_4 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_2 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_3 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_4 \end{pmatrix} \\ &+ f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_6 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_7 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_1 \end{pmatrix} - 4f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ q_5 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_2 \ 0 \end{pmatrix} \\ &- f \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ q_6 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ q_2 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 \ q_3 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} - 2f \begin{pmatrix} 0 \ q_7 \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I znowu, wzór w powyższym twierdzeniu jest tylko jednym z aż  $7 \cdot 2^9$  możliwych sformułowań tego warunku koniecznego i wystarczającego. Dzięki temu w każdym konkretnym przypadku możemy wybrać wersję, która najbardziej nam odpowiada. Ta metoda jest szczególnie przydatna do opisu reguł zachowujących sumę stanów spełniających pewne dodatkowe warunki – w szczególności w przypadkach, gdy te dodatkowe warunki skutkują zależnościami między monomerami lub dimerami. Dzieje się tak np. w przypadku reguł lokalnych z pewnego rodzaju symetrią, z których najbardziej naturalną jest rotacyjna symetryczność (będzie to tematem prac [H7] i [H8]).

Osobiście oceniam wynik w [H1] bardziej jako rzemieślniczy niż artystyczny. W rzeczywistości uzyskuje się go dzięki ogromnej determinacji w próbie przełożenia znanego jednowymiarowego wyniku na więcej wymiarów i przezwyciężenia związanych z tym problemów technicznych. Nie twierdzę, że to banalne (odkąd Boccara i Fukś udowodnili przypadek jednowymiarowy do mojego wyniku minęło aż 15 lat), ale nie ma tu szczególnie rewolucyjnej koncepcji.

## [H2]

Jak wspomniałam powyżej, warunki konieczne i wystarczające przedstawione w [29] ([H1]) można sformułować na  $(2d+1)2^{d^2}$  różne sposoby, gdzie  $d$  jest rozpatrywanym wymiarem, i choć wszystkie są równoważne, otrzymane wzory mogą różnić się liczbą wyrazów. Lepsze zrozumienie tego faktu doprowadziło mnie do pomysłu zupełnie nowego podejścia do badania własności zachowywania sumy stanów. W “*A split-and-perturb decomposition of number-conserving cellular automata*” [30] udowodniłam, że lokalna reguła dowolnego NCCA z sąsiedztwem von Neumanna może być rozłożona na dwie części: funkcję podziału i perturbację. Ponadto, zbiór wszystkich możliwych funkcji podziału ma bardzo prostą strukturę, podczas gdy zbiór wszystkich perturbacji tworzy przestrzeń liniową i dlatego jest bardzo łatwy do opisanego za pomocą bazy.

Aby rozwinąć ideę dekompozycji, ważne jest rozważenie *reguł lokalnych w szerszym znaczeniu*: porzucamy założenie, że wartości reguły lokalnej muszą należeć do  $Q$ . Takie obiekty nazywamy *funkcjami lokalnymi*.

**Definicja 4** *Funkcja lokalna  $h$  nazywana jest funkcją podziału, jeśli spełnia:*

$$(S1) \quad h(M_{\vec{v}:q}) \in Q, \text{ dla dowolnego monomera } M_{\vec{v}:q};$$

$$(S2) \quad \sum_{\vec{v} \in V} h(M_{\vec{v}:q}) = q, \text{ dla dowolnego stanu } q \in Q;$$

$$(S3) \quad h(N) = \sum_{\vec{v} \in V} h(M_{\vec{v}:N(\vec{v})}), \text{ dla dowolnego } N \in \mathcal{N}.$$

Zbiór wszystkich funkcji podziału jest oznaczany przez  $\mathcal{S}$ .

Powyższa definicja odzwierciedla oczywisty fakt, że jeśli konfiguracja początkowa ma tylko jedną komórkę w stanie niezerowym, to w następnym kroku czasowym CA zachowujący sumę stanów musi dokonać podziału tego stanu do sąsiadujących komórek w taki sposób, aby uzyskane fragmenty należały do zbioru stanów  $Q$ . Innymi słowy, ten stan się rozdziela, co dzieje się według pewnego przepisu zależącego od stanu. Funkcje podziału działają w następujący sposób: każdy stan dzieli się zgodnie ze swoim przepisem, niezależnie od stanów jego sąsiadów. Oczywiście funkcje podziału nie muszą być regułami lokalnymi. Rzeczywiście, ponieważ każdy stan dzieli się niezależnie, może się zdarzyć, że suma fragmentów stanów wpadających do jednej komórki od różnych sąsiadów nie należy do zbioru stanów  $Q$ . Jest to jednak niewielka wada w porównaniu z korzyściami, jakie funkcje podziału ze sobą niosą.

Zauważmy, że zbiór  $\mathcal{S}$  ma bardzo prostą strukturę. Rzeczywiście, można go utożsamiać z iloczynem kartezjańskim  $\prod_{q \in Q_+} S_q$ , gdzie  $Q_+ = Q \setminus \{0\}$  oraz

$$S_q = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2d+1}) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_{2d+1} = q, x_1, x_2, \dots, x_{2d+1} \in Q\}.$$

W szczególności, jeśli zbiór  $Q$  jest skończony, liczebność zbioru  $\mathcal{S}$  równa się  $\prod_{q \in Q_+} |S_q|$ . Na przykład, w przypadku tzw.  $k$ -ary CAs (binary, ternary, quaternary, quinary, i tak dalej), w których zbiór stanów jest postaci  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , dla pewnej liczby całkowitej  $k \geq 2$ , (patrz np. [31–34]), dla każdego  $q \in \{1, \dots, k-1\}$  zachodzi  $|S_q| = \binom{2d+q}{q}$  (patrz np. [35]), więc mamy

$$|\mathcal{S}| = \binom{2d+1}{1} \binom{2d+2}{2} \cdots \binom{2d+k-1}{k-1}. \quad (5)$$

Tabela 1 przedstawia  $|\mathcal{S}|$  dla pewnych przypadków wymiaru  $d$  i zbiorów stanów  $Q$ , natomiast w nawiasach podano liczbę wszystkich reguł lokalnych. Widać, że liczba funkcji podziału jest zdecydowanie mniejsza niż

	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$
$Q = \{0, 1\}$	3 (256)	5 ( $2^{32}$ )	7 ( $2^{128}$ )	9 ( $2^{512}$ )
$Q = \{0, 1, 2\}$	18 ( $3^{27}$ )	75 ( $3^{243}$ )	196 ( $3^{2187}$ )	405 ( $3^{19683}$ )
$Q = \{0, 1, 2, 3\}$	180 ( $4^{64}$ )	2625 ( $4^{1024}$ )	16464 ( $4^{16384}$ )	66825 ( $4^{262144}$ )

Tabela 1: Liczba wszystkich funkcji podziału i liczba wszystkich reguł lokalnych dla zbioru stanów  $Q$  i wymiaru  $d$ .

liczba wszystkich reguł lokalnych. Na przykład, w przypadku dwuwymiarowym dla  $Q = \{0, 1, 2\}$ , istnieje tylko 75 funkcji podziału, podczas gdy jest aż  $3^{3^5}$  reguł lokalnych – ta ostatnia liczba ma 116 cyfr.

Okazuje się, że dla reguły lokalnej zachowującej sumę stanów jedynym możliwym odstępstwem od bycia funkcją podziału jest tak zwana *perturbacja*.

**Definicja 5** Funkcja lokalna  $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  nazywa się **perturbacją** jeśli spełnia następujące dwa warunki:

(P1) dla dowolnego  $\vec{v} \in V$  i dla dowolnego  $q \in Q$ , zachodzi  $g(M_{\vec{v},q}) = 0$ ,

(P2) dla dowolnego  $\mathbf{x} \in X$ , zachodzi  $\sigma(A_g(\mathbf{x})) = 0$ .

Zbiór wszystkich perturbacji jest oznaczony przez  $\mathcal{P}$ .

Zbiór wszystkich perturbacji ma też bardzo przyjazną strukturę – jest przestrzenią liniową – i dlatego można go łatwo opisać za pomocą elementów bazy tej przestrzeni.

**Twierdzenie 6** Niech będzie dany zbiór  $\Lambda$ . Funkcja lokalna  $g$  jest perturbacją wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia (P1) definicji 5 oraz

$$g(N) = \sum_{\{\vec{u}, \vec{w}\} \in \Lambda} \left[ g \left( \begin{array}{c} D_{\vec{u}:N(\vec{u})} \\ \vec{w}:N(\vec{w}) \end{array} \right) - g \left( \begin{array}{c} D_{\vec{u}:N(-\vec{w})} \\ \vec{w}:N(-\vec{u}) \end{array} \right) \right], \quad (6)$$

zachodzi dla dowolnego  $N \in \mathcal{N}$ .

Jako konsekwencję Twierdzenia 6 otrzymujemy następującą uwagę.

**Uwaga 7** Aby zdefiniować perturbację, wystarczy zadeklarować jej wartości na dimerach  $D_{\vec{u},p}$ , gdzie  $\{\vec{u}, \vec{w}\} \in \Lambda$  oraz  $p, q \in Q_+$ .

Główne twierdzenie [H2] mówi co następuje:

**Twierdzenie 8** Reguła lokalna  $f$  zachowuje sumę stanów wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja podziału  $h$  i perturbacja  $g$  takie, że  $f = h + g$ . Ponadto dla danej reguły lokalnej  $f$  funkcje  $h$  i  $g$  są jednoznacznie określone.

Powyższy wynik jest jednym z tych, z których jestem najbardziej dumna. Jest to rozwiązanie problemu znalezienia takiej charakterystyki reguł lokalnych zachowujących sumę stanów, która, po pierwsze: jest oparta na prostej teorii, a po drugie: znacznie ułatwia lub wręcz umożliwia wyszukiwanie kompletnych list reguł lokalnych zachowujących sumę stanów dla danych  $d$  i  $Q$ .

Z matematycznego punktu widzenia jest to kompilacja dwóch bardzo dobrze znanych idei. Pierwszy pomysł można znaleźć na przykład w temacie równań trzeciego stopnia. Rzeczywiście, jeśli musimy rozwiązać równanie sześcienné w liczbach rzeczywistych, to nie mamy do tego żadnych wzorów. Ale możemy poszerzyć obszar swoich poszukiwań i znaleźć pierwiastki w zbiorze liczb zespolonych za pomocą wzoru Cardano (w powyższej teorii funkcje podziału pełnią rolę pierwiastków zespolonych), a następnie wybrać te, które są rzeczywiste (musimy zmodyfikować funkcje podziału do lokalnych reguł za pomocą perturbacji). Druga idea jest główną ideą teorii rozwiązywania równań liniowych (na przykład różniczkowych): aby rozwiązać równanie niejednorodne, należy znaleźć co najmniej jedno z jego rozwiązań, a następnie znaleźć wszystkie rozwiązania odpowiedniego równania jednorodnego. W powyższej teorii funkcje podziału są pewnymi rozwiązaniami równania niejednorodnego, podczas gdy perturbacje są wszystkimi rozwiązaniami odpowiedniego równania jednorodnego. Oczywiście te idee można kompilować na różne sposoby, ale celem było zdefiniowanie funkcji podziału i perturbacji w taki sposób, aby oba zbiory  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{P}$  miały prostą strukturę, dobrze nadającą się do symulacji komputerowych.

Artykuł [H2] zawiera również przykłady pokazujące, jak twierdzenie o dekompozycji pozwala zredukować złożoność obliczeniową znajdowania wszystkich NCCA z sąsiedztwem von Neumanna dla danych  $d$  i  $Q$ . W szczególności udało się skompilować pełną listę trójwymiarowych NCCA z trzema stanami. Przed wprowadzeniem



przedstawionej metody dekompozycji przypadek ten przekraczał możliwości obecnie dostępnych komputerów (np. skorzystanie z teorii Duranda i in. [22] wymagałoby sprawdzenia  $3^{3^7} \approx 2.9 \cdot 10^{1043}$  reguł lokalnych). Co więcej, to nowe podejście do badania  $d$ -wymiarowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna dało nadzieję na rozwiązanie niektórych nierozwiązanych pytań w tej dziedzinie, zwłaszcza następujących:

- Czy to prawda, że dla dowolnego  $d$  nie ma nietrywialnych binarnych NCCA?
- Czy to prawda, że w dowolnym wymiarze trzy stany to za mało, aby zdefiniować nietrywialny odwracalny NCCA z sąsiedztwem von Neumanna?

I rzeczywiście, twierdzenie o dekompozycji pozwoliło znaleźć odpowiedzi na oba te pytania (patrz [H3] i [H4]).

### [H3]

W artykule “*All binary number-conserving cellular automata based on adjacent cells are intrinsically one-dimensional*” [36] skupiam się na binarnych  $d$ -wymiarowych CA z sąsiedztwem von Neumanna. Fizyczna interpretacja rozważanych CA jest bardzo intuicyjna: chcemy opisać ruch cząstek w  $d$ -wymiarowej siatce. Każda komórka siatki jest albo pusta, albo zawiera cząstkę. W kolejnych krokach czasowych cząstki poruszają się między komórkami (w każdym kroku czasowym cząstka może przemieszczać się tylko do sąsiedniej komórki), ale w jednej komórce może znajdować się co najwyżej jedna cząstka na raz.

Przed [H3] zdecydowana większość wyników dla binarnych CA dotyczyła jednowymiarowych. Wiąże się to z dwukrotnie wykładniczym wzrostem liczby możliwych reguł lokalnych: jeśli wymiar przestrzeni wynosi  $d$ , to liczba komórek tworzących sąsiedztwo von Neumanna wynosi  $2d + 1$ , więc jest  $2^{2^{2d+1}}$  binarnych CA w tym przypadku. Jednowymiarowe binarne CA, lepiej znane jako Elementarne CA (ECA), są dość dobrze zbadane, a w szczególności wiadomo, że spośród wszystkich 256 z nich tylko pięć zachowuje sumę stanów: identyczność (ECA 204), shift w lewo (ECA 170), trafik w prawo (ECA 240), shift w prawo (ECA 184) i trafik w lewo (ECA 226) [37]. Zwiększenie wymiaru o jeden daje aż 4 294 967 296 dwuwymiarowych binarnych CA z sąsiedztwem von Neumanna, ale pojawiają się tylko cztery nowe NCCA: shift i trafik w dół oraz shift i trafik w górę. Jeśli  $d = 3$ , to liczebność zbioru wszystkich CA wzrasta do niewiarygodnie dużej liczby  $2^{128} \approx 3,4 \times 10^{38}$ , ale używając charakterystyki CA zachowujących sumę stanów podanej w [H1] udało się jeszcze znaleźć wszystkie NCCA i otrzymaliśmy, że jest ich tylko 13, a mianowicie: identyczność, sześć shiftów i sześć trafików (w każdym z możliwych kierunków: w prawo, w lewo, w górę, w dół, do przodu i do tyłu). W [30] postawiono hipotezę, że w przypadku binarnym zwiększenie wymiaru przestrzeni nie powoduje pojawienia się nowego rodzaju CA zachowujących sumę stanów.

Główny wynik pracy [H3] potwierdza tę hipotezę:

**Twierdzenie 9** *Niech dany będzie wymiar  $d \geq 1$ . Istnieją dokładnie  $4d + 1$   $d$ -wymiarowe binarne NCCA z sąsiedztwem von Neumanna: identyczność oraz shift i trafik w każdym z  $2d$  kierunków.*

W ten sposób została w pełni odkryta struktura  $d$ -wymiarowych binarnych CA z sąsiedztwem von Neumanna zachowujących sumę stanów i okazało się, że niezależnie od wymiaru  $d$ , wszystkie te automaty komórkowe są trywialne, ponieważ są wewnątrznie jednowymiarowe. Ponadto możliwe stało się szczegółowe opisanie dynamiki takich automatów na siatkach skończonych. Jeśli mamy do czynienia z shiftem (np. w kierunku  $\vec{v}_1$ ), to początkowy wzorec konfiguracji się nie zmienia, tylko przesuwa się w kierunku  $\vec{v}_1$  o jedną komórkę w każdym kroku czasowym. Tak więc, chociaż Twierdzenie 9 stwierdza, że taki CA działa niezależnie na każdym jednowymiarowym  $\vec{v}_1$ -rzędzie siatki  $\mathcal{C}$  (tj. wiersz rozciągający się w kierunku  $\vec{v}_1$ ), w przypadku shiftu obserwujemy akcję synchroniczną jako wynik zagregowany. Inaczej ma się sprawa z trafikami. Na przykład trafik w kierunku  $\vec{v}_1$  działa w następujący sposób. Wzorec każdego wiersza  $\vec{v}_1$  szybko się stabilizuje. Następnie, jeśli w danym  $\vec{v}_1$ -wierszu liczba jedynek jest mniejsza niż liczba zer, to w każdym kolejnym kroku czasowym każda jedynka wydaje się iść o jeden krok w kierunku  $\vec{v}_1$ . Jeśli liczba jedynek jest większa niż liczba zer, to w każdym kolejnym kroku czasowym każde zero wydaje się iść o jeden krok w kierunku  $-\vec{v}_1$ . Jeśli liczba jedynek jest równa liczbie zer, to wzór stabilizuje się jako naprzemienna sekwencja 0 i 1, która porusza się w czasie w kierunku  $\vec{v}_1$ .

Jestem naprawdę zadowolona z tego wyniku. Po pierwsze, Twierdzenie 9 pokazało, że twierdzenie o dekompozycji może być również wygodnym narzędziem do udowodnienia pewnych ogólnych własności dotyczących  $d$ -wymiarowych NCCA (nigdy wcześniej nie widzianych w literaturze). Co więcej, uzyskuje się ją za pomocą podstawowych narzędzi matematycznych, podobnie jak np. słynny wynik Landa i Belew [38], który w pełni odpowiedział na pytanie o istnienie rozwiązania problemu klasyfikacji gęstości początkowej.

### [H4]

W artykule “*Ternary reversible number-conserving cellular automata are trivial*” [39] skupiam się na trójstanowych  $d$ -wymiarowych CA z sąsiedztwem von Neumanna (tj.  $d$ -wymiarowe CA ze zbiorem stanów  $\{0, 1, 2\}$ ). Chciałam odpowiedzieć na pytanie, które z ogromnej liczby  $3^{3^{2d+1}}$  takich CA są zarówno zachowujące sumę stanów jak i odwracalne, gdyż nic nie było o tym wiadomo w przypadku  $d > 1$ .

Odwracalność CA przyciąga uwagę badaczy praktycznie od samego początku. Wynika to z faktu, że wielu z nich rozwija teorię CA, aby wykorzystać je jako odpowiednie narzędzie obliczeniowe do symulacji układów fizycznych. Tak więc, ponieważ odwracalność jest jednym z podstawowych praw fizyki w skali mikroskopowej, zwłaszcza w mechanice kwantowej, CA powinny raczej wykazywać tę samą właściwość.

Pierwsze badania nad odwracalnością CA są autorstwa Hedlunda [10] i Richardsona [40]. W literaturze można obecnie znaleźć szereg wyników na ten temat. Wśród nich są wyniki dotyczące nieskończonych CA, jak również skończonych CA z różnymi warunkami brzegowymi. Jednakże badania nad odwracalnością CA koncentrują się zazwyczaj tylko na jednowymiarowych CA oraz liniowych CA ze zbiorem stanów  $\mathbb{Z}_m$ .

Jeśli chodzi o jednowymiarowe CA, można śmiało powiedzieć, że problem został całkowicie rozwiązany. Rzeczywiście, skuteczny sposób określania odwracalności nieskończonych jednowymiarowych CA został pokazany przez Amoroso i Patt [41], a także przez Di Gregorio i Trautteur [42] oraz Sutner [43]. Dla skończonych CA algorytm decydujący o odwracalności został opracowany przez Bhattacharjee i Das [33]. Ponadto istnieje wiele wyników dotyczących konkretnych ECA (zob. na przykład [44–47]). Warto jednak podkreślić, że istniejące narzędzia nie pozwalają na wyliczenie wszystkich odwracalnych jednowymiarowych CA nawet w przypadku kilku stanów (oczywiście z wyjątkiem przypadku ECA), ponieważ nie jest możliwe sprawdzenie wszystkich CA o zadanym zbiorze stanów, ze względu na niepozwalającą na to liczebność przestrzeni poszukiwań.

Podczas gdy jednowymiarowe odwracalne CA zostały szczegółowo zbadane i to z wielu różnych punktów widzenia, nie można tego samego powiedzieć o dwu- lub wyższych wymiarach. Jest to konsekwencją negatywnego wyniku Kari [48] stwierdzającego, że nie ma ogólnego algorytmu, który mógłby zdecydować, czy dowolny dwuwymiarowy CA jest odwracalny.

Inną klasą CA (jedno- lub wielowymiarowych), dla której badacze znaleźli metody określania odwracalności, jest klasa liniowych CA (LCA). Powodem, dla którego LCA były szeroko badane, zwłaszcza ze zbiorem stanów  $\mathbb{Z}_m$ , jest to, że są one szczególnie podatne na analizę teoretyczną. Po pierwsze, liniowość reguł lokalnych otwiera drzwi do dziedziny algebry liniowej i można użyć potężnych narzędzi, takich jak macierze przejść, ponieważ LCA jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz przejść jest odwracalna (patrz na przykład [49–52]). Po drugie, fakt, że zbiór stanów jest skończonym pierścieniem przemiennym, pozwala na użycie formalnych reprezentacji szeregów potęgowych do określenia warunków koniecznych i wystarczających dla odwracalności LCA w terminach współczynników jego reguły lokalnej. Metoda ta została zapoczątkowana przez Itô i in. [53] i intensywnie rozwijana przez innych badaczy (patrz np. [54–56]). Zatem również w przypadku LCA ze zbiorem stanów  $\mathbb{Z}_m$  można powiedzieć, że problem odwracalności został całkowicie rozwiązany. W szczególności LCA zostały dokładnie zbadane pod kątem teorii ergodycznej: wykazano, że odwracalna LCA jest albo automorfizmem Bernoulliego, albo nieergodyczny [57]. Więcej informacji na temat problemu odwracalności tego typu CA można znaleźć w [58–60].

Jednak narzędzie macierzy przejść ma podstawowe ograniczenia, ponieważ rozmiar macierzy zależy od liczby komórek, więc to narzędzie staje się beużyteczne, gdy mamy do czynienia z nieskończonymi CA, a dla skończonych CA każdy rozmiar kraty należy rozpatrywać osobno. Co więcej, stosując teorię macierzową dla pierścienia  $\mathbb{Z}_m$ , który nie musi być ciałem, trzeba być bardzo ostrożnym (patrz [61] lub [62]). Również założenie o liniowości, a także użycie skończonego pierścienia jako zbioru stanów są często nie do zaakceptowania. Na przykład w modelowaniu ruchu cząstek chciałoby się, aby dwa plus jeden wynosiło trzy zamiast zera, jak w przypadku ciała  $\mathbb{Z}_3$ .

W pracy [H4] zastosowanie twierdzenia o dekompozycji pozwoliło na scharakteryzowanie wszystkich odwracalnych trójstanowych  $d$ -wymiarowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna. Warto zauważyć, że w tym przypadku zbiór stanów jest równy  $\{0, 1, 2\}$  bez żadnej „ładnej struktury matematycznej”. Główny wynik [H4] brzmi:

**Twierdzenie 10** *Niech  $d \geq 1$ . Każdy odwracalny  $d$ -wymiarowy trójstanowy NCCA jest shiftem (w pewnym kierunku  $\vec{v} \in V$ ).*

W ten sposób okazało się, że wszystkie odwracalne  $d$ -wymiarowe trójstanowe NCCA są trywialne, gdyż są wewnątrznie 1-wymiarowe. Potwierdziło to hipotezę, że w dowolnym wymiarze trzy stany to zbyt mało, aby umożliwić istnienie nietrywialnych odwracalnych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna.

[H5]

Artykuł *‘Efficient enumeration of three-state two-dimensional number-conserving cellular automata’* [63] przedstawia podejście do znajdowania wszystkich dwuwymiarowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna na podstawie wyników udowodnionych w [H1] (Należy zauważyć, że ta praca została napisana przed otrzymaniem twierdzenia o dekompozycji i dotyczy tylko  $d = 2$ .) Skuteczność tego podejścia jest wykazana poprzez wyliczenie i opisanie czterech przypadków szczególnych: totalistycznych, zewnątrzno-totalistycznych, binarnych i trójstanowych dwuwymiarowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna. Chociaż wyniki dla pierwszych trzech przypadków były raczej znane (ale ostatni wynik nie), podejście wprowadzone w pracy [H1] pozwoliło na uzyskanie tych wyników praktycznie bez wysiłku.

Pierwszy wynik dotyczy totalistycznych dwuwymiarowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna (totalistyczny CA to CA, którego lokalna reguła zależy tylko od sumy stanów wszystkich komórek w sąsiedztwie). Stwierdza

on, że jedynym kandydatem na lokalną regułę takiego CA jest średnia arytmetyczna pięciu stanów w sąsiedztwie. Prowadzi to do następujących wniosków:

**Wniosek 11** *Nie istnieje totalistyczny dwuwymiarowy  $k$ -ary NCCA z sąsiedztwem von Neumanna, podczas gdy istnieje dokładnie jeden totalistyczny dwuwymiarowy NCCA z sąsiedztwem von Neumanna i ze zbiorem stanów  $Q = [0, 1]$ .*

Przypadek zewnętrzno-totalistycznych dwuwymiarowych NCCA wygląda trochę lepiej (zewnętrzno-totalistyczny CA to CA, którego lokalna reguła zależy tylko od stanu komórki centralnej i sumy stanów sąsiednich komórek):

**Twierdzenie 12** *Niech  $k > 1$  będzie liczbą całkowitą. Istnieje tylko jeden zewnętrzno-totalistyczny dwuwymiarowy  $k$ -ary NCCA z sąsiedztwem von Neumanna, a mianowicie identyfikacja.*

**Twierdzenie 13** *Niech  $f$  będzie regułą lokalną dwuwymiarowego CA z sąsiedztwem von Neumanna ze zbiorem stanów  $Q = [0, 1]$ . Wówczas  $f$  jest regułą lokalną zewnętrzno-totalistycznego dwuwymiarowego NCCA wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie  $\alpha \in [0, 1]$ , że*

$$f\left(\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \ q_3 \ q_4 \\ q_5 \end{array}\right) = \alpha q_3 + \frac{1}{4}(1 - \alpha)(q_1 + q_2 + q_4 + q_5), \quad (7)$$

dla dowolnych  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \in [0, 1]$ .

Druga część pracy [H5] jest poświęcona dwuwymiarowym trójstanowym NCCA z sąsiedztwem von Neumanna. Przede wszystkim zauważmy, że korzystając z równania (4) można od razu znaleźć wszystkie dwuwymiarowe binarne NCCA z sąsiedztwem von Neumanna (otrzymujemy układ 32 równań liniowych z 8 niewiadomymi). Okazuje się, że ten układ ma tylko 9 rozwiązań w zbiorze  $\{0, 1\}$ , więc istnieje tylko 9 różnych dwuwymiarowych binarnych NCCA, a mianowicie: identyfikacja, 4 shifty i 4 trafiki (w każdym z możliwych kierunków: w prawo, w lewo, w górę i w dół). Wszystkie są w pewnym sensie trywialne, ponieważ można je traktować jako jednowymiarowe reguły działające w wierszach lub kolumnach.

Nieco bardziej subtelne użycie równania (4) dla  $Q = \{0, 1, 2\}$  pozwala znaleźć wszystkie 1327 dwuwymiarowe trójstanowe NCCA i tylko 287 z nich to jednowymiarowe CA działające w kierunku pionowym lub poziomym. Zbiór wszystkich dwuwymiarowych trójstanowych NCCA można podzielić na 145 klas równoważności. Rzeczywiście, możemy zastosować jedną z 8 symetrii sąsiedztwa von Neumanna (wzdłuż osi pionowej, poziomej lub ukośnej oraz obrót o 90, 180 lub 270 stopni) i ewentualnie operator sprzężenia (zamiana stanów 0 i 2):

$$f^C\left(\begin{array}{c} u \\ l \ c \ r \\ d \end{array}\right) = 2 - f\left(\begin{array}{c} 2 - u \\ 2 - l \ 2 - c \ 2 - r \\ 2 - d \end{array}\right).$$

Tak więc istnieje tylko 145 niezależnych dwuwymiarowych trójstanowych NCCA. Wśród tych CA jest dokładnie 48 jednowymiarowych CA opisanych wcześniej w [21]. Pozostałe 97 CA działa w sposób prawdziwie dwuwymiarowy. Tak więc przypadek trójstanowych CA jest znacznie bardziej złożony niż binarnych CA.

Ostatni wynik pracy [H5] dotyczy odwracalności dwuwymiarowych trójstanowych NCCA. Decydowalność odwracalności CA w dwóch lub więcej wymiarach jest uważane za trudny problem (tak jak wspomniałam, wykazano, że ogólnie jest to własność nierozstrzygalna [48]), więc myślę, że ten wynik jest głównym wynikiem [H5].

**Twierdzenie 14** *Nie ma nietrywialnych odwracalnych dwuwymiarowych trójstanowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli chodzi o kwestię odwracalności trójstanowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna, to przypadek  $d = 2$  nie różni się od przypadku  $d = 1$ . W czasie pracy nad tym twierdzeniem, pojawiła się hipoteza, że dalsze zwiększanie wymiaru nie pozwala na żaden nowy typ odwracalnych trójstanowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna. Jak już wspomniałam, zostało to następnie udowodnione w pracy [H2].

[H6]

Artykuł “A two-layer representation of four-state reversible number-conserving 2D cellular automata” [64] przedstawia metodę wyliczania wszystkich odwracalnych dwuwymiarowych czterostanowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna. Okazuje się, że każdy taki CA można sobie wyobrazić jako dwa wzajemnie połączone jednowymiarowe binarne NCCA. Opracowanie metody uzyskiwania tego wyniku było znaczącym krokiem w badaniu wielowymiarowych NCCA.

Wcześniej badania koncentrowały się na przypadku jednowymiarowym. Schranko i De Oliveira [65] przeprowadzili eksperymenty numeryczne obejmujące wiele reguł, aby ostatecznie wysnuć przypuszczenie, że klasa odwracalnych jednowymiarowych NCCA jest zbyt restrykcyjna, aby była uniwersalna obliczeniowo. Zostało to udowodnione w

przypadku promienia  $1/2$  CAs [66], ale ogólnie tak nie jest, jak pokazuje teoria Morita [67]. Zaś Imai i in. [68] wyszukali wszystkie odwracalne jednowymiarowe NCCA z promieniem jeden do czterech stanów włącznie poprzez wyczerpujące wyszukiwanie, a także skonstruowali pewną liczbę odwracalnych jednowymiarowych NCCA z pięcioma stanami (ale lista nie była kompletna).

Jeśli chodzi o wymiar dwa, udowodniono w [63] ([H5]), że w przypadku zbioru stanów  $\{0, 1\}$  lub  $\{0, 1, 2\}$ , tj., kiedy mamy do czynienia z binarnymi lub trójstanowymi odwracalnymi NCCA, są tylko trywialne, a mianowicie identyczność oraz shifty (w każdym z czterech możliwych kierunków). Jednak nie było znane żadne podejście, które byłoby praktycznie wykonalne i pozwalało znaleźć wszystkie odwracalne NCCA z więcej niż trzema stanami w dwóch (lub więcej) wymiarach, a znalezienie takiego podejścia przynajmniej dla dwóch wymiarów uznano za skomplikowane zadanie z dwóch głównych powodów. Po pierwsze, generalnie odwracalność wielowymiarowych CA jest nierozstrzygalna [48]. Ograniczenia do siatek skończonych są oczywiście rozstrzygalne, ale nadal trudne obliczeniowo (patrz np. [69]). Po drugie, nie było dostępnych narzędzi do wyliczenia wszystkich czterostanowych dwuwymiarowych NCCA – w przypadku czterech stanów niepraktyczne stało się przeszukiwanie całej przestrzeni dwuwymiarowych CA przy użyciu warunku koniecznego i wystarczającego udowodnionego przez Duranda i in. [22] ze względu na wielkość przestrzeni wyszukiwania.

Metoda opisana w [H6] potrafiła przewyciężyć obie te trudności. Po pierwsze, zaczyna się od innowacyjnego opisu odwracalnych jednowymiarowych czterostanowych NCCA, który pokazuje, że składają się one z dwóch wzajemnie połączonych warstw, zwanych dalej reprezentacją dwuwarstwową. Tę dwuwarstwową reprezentację można łatwo przenieść do dwóch wymiarów i pozwala nam ona skonstruować listę aż 65 odwracalnych dwuwymiarowych czterostanowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna (w tym 60 nietrywialnych), dla których można łatwo wykazać odwracalność. Po drugie, używamy nowego podejścia do badania zachowania sumy stanów przez CA, przedstawionego w [H2]. Rzeczywiście, rozkład reguł lokalnych zachowujących sumę stanów na funkcje podziału i perturbacje daje praktyczny sposób wyliczenia wszystkich dwuwymiarowych czterostanowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna bez konieczności przeszukiwania całej przestrzeni  $4^{4^5} \approx 3.2 \cdot 10^{616}$  dwuwymiarowych CA: wystarczy wygenerować wszystkie funkcje podziału (2625), a następnie dla każdej funkcji podziału znaleźć wszystkie możliwe perturbacje, co dało wynik w postaci 17 582 011 reguł lokalnych zachowujących sumę stanów. Wreszcie korzystamy z faktu, że łatwo jest zweryfikować, że dany CA nie jest odwracalny, znajdując dwie konfiguracje, które mają tego samego następcę. W ten sposób odrzucamy z naszej listy dwuwymiarowych czterostanowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna te, które zdecydowanie nie są odwracalne. Ponieważ pozostało nam dokładnie 65 (skonstruowanych w pierwszym kroku), możemy stwierdzić, że znaleźliśmy je wszystkie.

Chociaż metoda przedstawiona w pracy [H6] wykorzystuje twierdzenie o dekompozycji tylko w celu przewyciężenia technicznych ograniczeń komputerów, uważam, że można ją będzie wykorzystać do sprawdzenia, czy poniższe przypuszczenie jest prawdziwe, czy też nie:

**Conjecture 1** *Niech  $d \geq 1$ . Istnieją dokładnie  $(2d + 1)(6d + 1)$  odwracalne czterostanowe  $d$ -wymiarowe NCCA z sąsiedztwem von Neumanna.*

[H7]

Artykuł “Two-dimensional rotation-symmetric number-conserving cellular automata” [70] jest znaczącym krokiem naprzód w badaniu dwuwymiarowych NCCA z sąsiedztwem von Neumanna, których reguła lokalna jest rotacyjnie symetryczna.

**Definicja 15** *Dwuwymiarowy CA z sąsiedztwem von Neumanna nazywa się rotacyjnie symetryczny, jeśli jego reguła lokalna  $f$  spełnia dla dowolnych  $u, l, c, r, d \in Q$*

$$f \begin{pmatrix} u \\ l \ c \ r \\ d \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} r \\ u \ c \ d \\ l \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Pierwszą charakterystykę dwuwymiarowych NCCA rotacyjnie symetrycznych z sąsiedztwem von Neumanna (R-NCCA) uzyskali Imai i in. [26]. Ich wyniki były oparte na metodzie wprowadzonej przez Tanimoto i Imai [25], która pozwoliła opisać dwuwymiarowe CA zachowujące sumę stanów z sąsiedztwem von Neumanna za pomocą *funkcji przepływu* (w pionie, poziomie lub po przekątnej) i umożliwiła tworzenie dwuwymiarowych CA zachowujących sumę stanów.

Rozważania Imai i in. [26] pozwoliły wyliczyć wszystkie dwuwymiarowe R-NCCA z sąsiedztwem von Neumanna do pięciu stanów. Co więcej, autorzy [26] pokazali, że żaden z tych CA nie jest silnie uniwersalny (tj., nie może symulować dowolnej maszyny Turinga, zaczynając od skończonej konfiguracji). Z drugiej strony, od ponad dziesięciu lat istnieje konstrukcja logicznie uniwersalnego (tj., zdolnego do symulacji dowolnego obwodu wykonującego dowolne obliczenia) R-NCCA z czternastoma stanami [25]. Powstaje naturalna potrzeba zamknięcia tej luki. Oczywiście nasza niezdolność do skonstruowania uniwersalnego R-NCCA z mniej niż czternastoma

stanami nie dowodzi, że żaden taki nie istnieje. Możemy zacząć od przeciwnej strony i spróbować znaleźć uniwersalny R-NCCA z sześcioma stanami lub argumentować, że taki CA nie istnieje (a następnie rozważyć siedem stanów i tak dalej). Aby to zrobić, wygodnie byłoby mieć pełną listę R-NCCA z zadaną liczbą  $n$  stanów i sprawdzić je pod kątem uniwersalności. Przed pracą [H7] nie było narzędzia pozwalającego na wygenerowanie takiej listy dla  $n > 5$ . Nie było nawet szacunków, ile takich reguł istnieje. Głównym powodem tej trudności było to, że zbiór wszystkich dwuwymiarowych CA o rotacyjnie symetrycznych z sześcioma stanami i sąsiedztwem von Neumanna jest ogromny; ma liczebność większą niż  $6^{6^5/4}$  (ta liczba ma 1513 cyfr). Aby znaleźć CA zachowujące sumę stanów w tym zbiorze, nie można go przeszukiwać przy użyciu warunków koniecznych i wystarczających podanych na przykład w [22].

W pracy [H7] zastosowano to samo podejście, co w pracy [H1], aby ustalić metodę, która pozwala na wydajne wyliczanie wielostanowych dwuwymiarowych R-NCCA. Na przykład, opracowane narzędzia pozwoliły ręcznie znaleźć wszystkie dwuwymiarowe R-NCCA z sześcioma stanami:

**Twierdzenie 16** *Istnieje dokładnie 116 dwuwymiarowych R-NCCA z sąsiedztwem von Neumanna i ze zbiorem stanów  $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .*

Co więcej, metoda ta nie jest trudna do zaimplementowania na komputerze, a pozwala wygenerować listę wszystkich dwuwymiarowych siedmio- lub ośmiostanowych R-NCCA z sąsiedztwem von Neumanna. Jest to poważny krok naprzód w próbie odpowiedzi na pytanie: jaka jest minimalna liczba stanów potrzebnych do uzyskania uniwersalnego R-NCCA. Mając kompletne listy reguł, znawcy uniwersalności mogą je kolejno sprawdzać.

Na etapie składania do publikacji jeden z recenzentów zapytał, czy można odpowiedzieć na pytanie „A jak to jest z innymi zbiorami stanów  $Q$ ?” Jego/jej pytanie dotyczyło nierozwiązanego problemu:

**Pytanie 1** *Czy każdy dwuwymiarowy R-NCCA z sąsiedztwem von Neumanna z  $n$  stanami jest izomorficzny z jakimś R-NCCA ze zbiorem stanów  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ?*

W przypadku dwuwymiarowych CA z sąsiedztwem von Neumanna termin „izomorficzny” rozumiany jest w następujący sposób.

**Definicja 17** *Mówimy, że CA ze zbiorem stanów  $Q$  i regułą lokalną  $f$  jest izomorficzna z CA ze zbiorem stanów  $\tilde{Q}$  i regułą lokalną  $\tilde{f}$  jeśli istnieje bijekcja  $\phi: Q \rightarrow \tilde{Q}$  taka, że dla dowolnego  $u, l, c, r, d, x \in Q$*

$$f\left(\begin{array}{c} u \\ l \ c \ r \\ d \end{array}\right) = x \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad \tilde{f}\left(\begin{array}{c} \phi(u) \\ \phi(l) \ \phi(c) \ \phi(r) \\ \phi(d) \end{array}\right) = \phi(x). \quad (9)$$

Wiadomo było, że w przypadku  $n \leq 4$  odpowiedź na Pytanie 1 jest pozytywna. Ponadto wiadomo było, że w przeciwieństwie do dwuwymiarowych R-NCCA z co najwyżej czterema stanami, liczba R-NCCA z pięcioelementowym zbiorem stanów zależy od jego struktury. Rzeczywiście, Imai i in. [26] udowodnili, że jeśli elementy rozważanego zbioru stanów  $Q$  tworzą ciąg arytmetyczny, to są dokładnie cztery R-NCCA z tym zbiorem stanów (i są one izomorficzne z R-NCCA ze zbiorem stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ); w przeciwnym razie istnieje tylko jeden R-NCCA: identyczność.

Trochę czasu zajęło mi udzielenie odpowiedzi na pytanie recenzenta (stąd tak późna ostateczna data publikacji), ale udało mi się szczegółowo rozwiązać ten problem i uzyskałam charakterystykę w postaci następującego zapisu.

**Definicja 18** *Zbiór skończony  $Q \subset \mathbb{R}$  nazywamy  $m$ -arytmetycznym, jeśli pewne  $m$  z jego elementów tworzy ciąg arytmetyczny.*

Otrzymana charakterystyka daje się podsumować w poniższych twierdzeniach.

**Twierdzenie 19** *Niech sześcioelementowy zbiór stanów  $Q \subset \mathbb{R}$  będzie 6-arytmetyczny. Istnieje dokładnie 116 R-NCCA ze zbiorem stanów  $Q$ . Każdy z nich jest izomorficzny z R-NCCA ze zbiorem stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .*

**Twierdzenie 20** *Niech  $Q \subset \mathbb{R}$  ma sześć elementów. Jeśli  $Q$  nie jest 5-arytmetyczny, to istnieje tylko jeden R-NCCA ze zbiorem stanów  $Q$ , a mianowicie identyczność.*

**Twierdzenie 21** *Niech  $Q \subset \mathbb{R}$  ma sześć elementów. Jeśli  $Q$  jest 5-arytmetyczny, ale nie 6-arytmetyczny, to istnieją dokładnie dwa R-NCCA ze zbiorem stanów  $Q$  i oba z nich są izomorficzne z R-NCCA ze zbiorem stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .*

Bardzo się cieszę, że teraz odpowiedź na Pytanie 1 w przypadku  $n = 6$  jest znana (i jest pozytywna), w szczególności, że ostatnie badania przeprowadzone przez mój zespół badawczy wykazały, że już dla  $n = 7$  odpowiedź jest negatywna (patrz [71]).

[H8]

Artykuł *“Three-dimensional rotation-symmetric number-conserving cellular automata”* [72] przedstawia wyniki badań trójwymiarowych rotacyjno-symetrycznych automatów komórkowych z sąsiedztwem von Neumanna, które zachowują sumę stanów. Pokazano, że każdy taki nietrywialny automat wymaga co najmniej siedmiu stanów, co zgadza się z intuicją opartą na znanych wynikach dla przypadków jedno- i dwuwymiarowych. Podana jest również pełna charakterystyka takich automatów komórkowych z siedmioelementowym zbiorem stanów, a wynik jest dość zaskakujący.

Zdecydowana większość wyników dotyczących zachowania liczby CA dotyczy przypadków jednowymiarowych i dwuwymiarowych. Jak już wspominałam, wiąże się to oczywiście z dwukrotnie wykładniczym wzrostem liczby możliwych reguł lokalnych: jeśli wymiar przestrzeni wynosi  $d$ , to liczba komórek tworzących sąsiedztwo von Neumanna wynosi  $2d + 1$ , więc jest  $n^{2d+1}$   $n$ -stanowych CA w tym przypadku.

Jednym z przykładów rotacyjno-symetrycznego NCCA z sąsiedztwem von Neumanna, który działa w dowolnym wymiarze, jest identyczność, ale jest ona oczywiście najmniej interesująca. Celem pracy [H8] była odpowiedź na dwa pytania: jaka jest minimalna liczba stanów dopuszczających istnienie nietrywialnej trójwymiarowej rotacyjno-symetrycznej NCCA (Q1) oraz jak duża jest rodzina wszystkich takich automatów z tym minimalnym zbiorem stanów (Q2).

W jednym wymiarze sąsiedztwo von Neumanna jest po prostu klasycznym sąsiedztwem o promieniu jeden, a symetria obrotowa oznacza, że jest *”amphichiral”*, tj., niezmiennicze ze względu na lustrzane odbicie (patrz np. [37]). Wiadomo, że wśród ECA jest tylko pięć zachowujących sumę stanów: identyczność (ECA 204), shift w lewo (ECA 170), shift w prawo (ECA 240), trafik w prawo (ECA 184) i trafik w lewo (ECA 226), ale tylko identyczność jest również *”amphichiral”* [37]. Zatem dwa stany nie wystarczają, aby umożliwić zdefiniowanie nietrywialnego rotacyjno-symetrycznego NCCA w przypadku jednego wymiaru. Z drugiej strony Boccara i Fuks [21] znaleźli wszystkie 144 jednowymiarowe trójstanowe NCCA (tj., ze zbiorem stanów  $\{0, 1, 2\}$ ), a wśród nich są dokładnie dwa, które są również amfichiralne, a mianowicie identyczność i nietrywialny CA, który działa w następujący sposób: w każdym kolejnym kroku czasowym każdy stan 2 daje „jeden” każdemu stanowi 0 w swoim sąsiedztwie, podczas gdy stan 1 jest niezmienny. Zatem w jednym wymiarze odpowiedź na pytanie (Q1) to „trzy”, a rodzina będąca odpowiedzią na pytanie (Q2) jest bardzo uboga, gdyż składa się tylko z jednego elementu, który zresztą nie jest bardzo skomplikowany.

W dwóch wymiarach odpowiedzi na oba powyższe pytania udzielili Imai i in. [26]. Udowodnili, że wszystkie dwuwymiarowe rotacyjnie symetryczne NCCA z sąsiedztwem von Neumanna z czterema lub mniej stanami są trywialne i stwierdzili, że minimalny zbiór stanów, który pozwala zdefiniować nietrywialny taki automat, musi mieć pięć elementów tworzących postęp arytmetyczny. Co więcej, scharakteryzowali wszystkie rotacyjnie symetryczne NCCA z tym minimalnym zestawem stanów i uzyskali dokładnie cztery: identyczność i trzy nietrywialne. Jeden z nich jest, zgodnie z oczekiwaniami, analogiczny do tego w jednym wymiarze, co oznacza, że działa w następujący sposób: w każdym kolejnym kroku czasowym każdy stan 4 daje „jeden” każdemu stanowi 0 w swoim sąsiedztwie, podczas gdy stany 1, 2 i 3 nie zmieniają się. Jednak w dwóch wymiarach pojawił się nowy rodzaj nietrywialnego rotacyjno-symetrycznego NCCA z minimalnym zbiorem stanów. Jego działanie zależy również od stanów komórek leżących ukośnie w sąsiedztwie komórki centralnej (szczegóły można znaleźć w [26]).

Chociaż złożoność obliczeniowa znalezienia wszystkich trójwymiarowych NCCA o zadanym zbiorze stanów przed publikacją [H8] nie pozwoliła na udzielenie odpowiedzi na pytania (Q1) i (Q2), oczekiwano, że odpowiedź na (Q1) będzie *”siedem”* (liczba komórek w sąsiedztwie), a odpowiedź na pytanie (Q2) brzmi: *”te same rodzaje CA jak dla dwóch wymiarów i może trochę więcej”*.

W pracy [H8], przyjmując nowe podejście do badania NCCA, które zaproponowaliśmy w [H2] (twierdzenie o dekompozycji), można było odpowiedzieć na oba pytania. Z grubsza rzecz biorąc, otrzymane wyniki potwierdzają oczekiwanie w kwestii (Q1), ale odpowiedź na (Q2) jest dość zaskakująca, ponieważ okazało się, że istnieje tylko jeden nietrywialny trójwymiarowy NCCA o najmniejszej liczbie stanów i działa analogicznie jak w jednym wymiarze. A dokładniej, udowodniono, że najmniejszy zbiór stanów, który dopuszcza nietrywialny NCCA z symetrią rotacyjną, musi mieć siedem elementów tworzących postęp arytmetyczny. Co więcej, dla takiego zbioru stanów istnieje tylko jeden nietrywialny NCCA z symetrią rotacyjną i jest on izomorficzny z konkretnym NCCA ze zbiorem stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , który działa w następujący sposób: stan 6 daje „jeden” każdemu stanowi 0 w jego sąsiedztwie, podczas gdy stany 1, 2, 3, 4 i 5 są permanentne. Chociaż wynik ten jest absolutnie zaskakujący, biorąc pod uwagę wyniki dla mniejszych wymiarów, teraz można go łatwo wyjaśnić. Rzeczywiście, w trzech wymiarach grupa wszystkich obrotów jest na tyle bogata, że możemy zamieniać pozycje dowolnych dwóch niecentralnych komórek w sąsiedztwie von Neumanna, co jest niemożliwe w dwóch wymiarach.

W przeciwieństwie do tradycyjnych podejść w dziedzinie CA, ani jeden dowód w [H8] nie wymaga żadnych ciężkich eksploracji obliczeniowych, ponieważ użycie twierdzenia o dekompozycji pokonuje większość trudności pojawiających się w wyższych wymiarach. Pozostała część argumentacji jest już elementarna.

## 4.2 Niektóre z moich pozostałych osiągnięć

Przeglądając się tematami innych moich prac, można wyróżnić dodatkowo co najmniej trzy główne kierunki badań (podawana niżej numeracja jest zgodna z *”Wykazem osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny”*).

## Afiniczne Ciągłe Automaty Komórkowe

Ciągłe Automaty komórkowe (CCA) można postrzegać jako uogólnienie CA, w którym czas i przestrzeń są nadal dyskretne, ale komórki mogą przyjmować stany z pewnego nieskończonego (często ciągłego) zbioru. Jednym z najbardziej znanych przykładów takich dynamicznych systemów są "coupled map lattices". Dobrze znane uogólnienie binarnych CA na CCA z  $[0, 1]$  jako zbiorem stanów jest uzyskiwane przez "fuzzification" w [73] i było dalej badane, na przykład w [74, 75]. Ten proces fuzyfikacji pozwala na powiązanie z każdym binarnym CA określonego CCA (tzw. Fuzzy CA) poprzez rozszerzenie dziedziny reguły lokalnej. Związki między Fuzzy CA a ECA można znaleźć w [76].

Dalsze uogólnienie powyższego pomysłu zaowocowało definicją afinicznych CCA (ACCA) [77]. Ten rodzaj CCA jest uważany za najprostsze możliwe uogólnienie binarnych CA – oczywiście poza Fuzzy CA – ponieważ mają one lokalną regułę, która jest afiniczna dla każdej zmiennej. Przypomnijmy, że funkcja  $f(x_1, \dots, x_n)$  jest afiniczna ze względu na zmienną  $x_i$ , gdy dla dowolnych ustalonych  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , funkcja  $f_i [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dana wzorem  $f_i(x_i) = f(x_1, \dots, x_n)$  jest afiniczna, tj.  $f_i(x_i) = ax_i + b$  dla pewnych  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Moje główne wyniki w zakresie ACCA zawarte są w następujących czterech artykułach (w kolejności chronologicznej):

- [N12] Barbara Wolnik, Marcin Dembowski, Witold Bołt, Jan M. Baetens, Bernard De Baets: *Density-conserving affine continuous cellular automata solving the relaxed density classification problem*, Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, vol. 50, nr 34, 2017, 345103 (18 stron), 30 punktów, IF(1,963)

*W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie dowody twierdzeń w zakresie warstwy analitycznej. Wspólna jest praca nad pozostałymi wynikami oraz nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

- [N11] Marcin Dembowski, Barbara Wolnik, Witold Bołt, Jan M. Baetens, Bernard De Baets: *Affine continuous cellular automata solving the fixed-length density classification problem*, Natural Computing, vol. 17, nr 3, 2018, pp. 467-477, 25 punktów, IF(1,33)

*W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie dowody twierdzeń w zakresie warstwy analitycznej. Wspólna jest praca nad pozostałymi wynikami oraz nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

- [N9] Marcin Dembowski, Barbara Wolnik, Witold Bołt, Jan M. Baetens, Bernard De Baets: *Two-dimensional Affine Continuous Cellular Automata solving the relaxed density classification problem*, Journal of Cellular Automata, vol. 14, nr 3-4, 2019, pp. 191-212, 40 punktów, IF(0,596)

*W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie dowody twierdzeń w zakresie warstwy analitycznej. Wspólna jest praca nad pozostałymi wynikami oraz nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

- [N4] Barbara Wolnik, Marcin Dembowski, Antoni Augustynowicz, Bernard De Baets: *A complete description of the dynamics of legal outer-totalistic affine continuous cellular automata*, Nonlinear Dynamics, 2022, nr online first, s.1-22. DOI:10.1007/s11071-022-07642-w 140 punktów, IF(5,741)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy jestem autorem lub współautorem wszystkich dowodów twierdzeń w zakresie warstwy analitycznej (mój wkład w tym zakresie oceniam na co najmniej 70%). Wspólna jest praca nad pozostałymi wynikami oraz nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

Prace [N12], [N11] i [N9] dotyczą dobrze znanego problemu klasyfikacji gęstości początkowej (DCP). Po wprowadzeniu DCP przez Gács i in. [78], został on dokładniej zbadany przez Packard [79]. Zasadniczo problem ten sprowadza się do poszukiwania binarnego CA, który jest w stanie określić, czy całkowita liczba jedynek w jego początkowej konfiguracji jest większa niż całkowita liczba zer, w taki sposób, aby ewoluował do jednorodnej konfiguracji 1 i 0 w przeciwnym razie. Niestety, w [38, 80] pokazano, że nie ma CA, który rozwiązałby ten problem poprawnie dla dowolnej liczby komórek.

Jednak niektóre CA są w stanie rozwiązać ten problem dla wielu początkowych konfiguracji. Jedna z najbardziej znanych – reguła Gacs-Kurdyumova-Levina (GKL) [78] – prowadzi do poprawnego rozwiązania dla ponad 80% początkowych konfiguracji, zaś podobne CA zostały znalezione za pomocą algorytmów genetycznych [81, 82]. Aby uzyskać nieomylny klasyfikator, wielu badaczy zmodyfikowało pierwotny problem, dopuszczając dwa CA (zamiast jednego) [83], dodając pamięć [84] lub używając probabilistycznych CA [85–87]. W innych badaniach specyfikacja wyjściowa problemu jest zmieniana [88], akceptując jako prawidłowe odpowiedzi heterogeniczne konfiguracje, które jednak spełniają pewne właściwości. Oznacza to jednak, że do odczytania odpowiedzi potrzeba wielu kroków czasowych (i pamięci) lub że uzyskuje się dostęp do stanów wielu komórek (dostęp globalny).

Poszukiwanie nieomylnego klasyfikatora mającego zastosowanie do wszystkich konfiguracji początkowych doprowadziło również do powstania podejścia obejmującego CCA. Na przykład, Briceño i in. [89] proponują CA o dużej dyfuzji i małej amplifikacji, uzyskując poprawne rozwiązanie DCP dla dowolnej liczby komórek. Jednak

występuje tam parametr związany z liczbą komórek, więc kończy się to raczej rodziną CCA niż pojedynczym CCA.

Badania rozpoczęłam od jednowymiarowych ACCA o promieniu jeden i pierwsze pytanie, na które chciałam odpowiedzieć, brzmiało: czy takie ACCA może być idealnym rozwiązaniem dla DCP? Definicja DCP dla jednowymiarowych CCA o promieniu jeden jest następująca:

**Definicja 22 (Problem klasyfikacji gęstości początkowej w ujęciu klasycznym)** Niech  $\rho_0 \in (0, 1)$  oraz niech  $A_f$  będzie regułą globalną jednowymiarowego CCA o promieniu jeden. Mówimy, że ten CCA rozwiązuje DCP z progiem  $\rho_0$  w klasycznym sensie jeśli dla dowolnego  $N \in \mathbb{N}$  oraz  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$ , zachodzi:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) < \rho_0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A_f^t(\mathbf{x}) = (0, 0, \dots, 0), \\ \rho(\mathbf{x}) > \rho_0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A_f^t(\mathbf{x}) = (1, 1, \dots, 1).\end{aligned}$$

Zauważmy, że próg  $\rho_0 = \frac{1}{2}$  rozróżnia, czy w konfiguracji jest więcej zer, czy jedynek. W przypadku CCA stosujemy następujący dodatkowy warunek:

**Definicja 23 ("Threshold-conserving" CCA)** Niech  $\rho_0 \in (0, 1)$  oraz niech  $A_f$  będzie regułą globalną CCA. Mówimy że ten CCA zachowuje próg  $\rho_0$  jeśli dla dowolnego  $N \in \mathbb{N}$  oraz  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$ , zachodzi:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) < \rho_0 &\Rightarrow \rho(A_f(\mathbf{x})) \leq \rho_0, \\ \rho(\mathbf{x}) > \rho_0 &\Rightarrow \rho(A_f(\mathbf{x})) \geq \rho_0.\end{aligned}$$

Jeden z moich wyników w [N12] stwierdza, że odpowiedź na powyższe pytanie jest negatywna:

**Twierdzenie 24** Niech  $\rho_0 \in (0, 1)$ . Nie istnieje jednowymiarowy ACCA o promieniu jeden, który rozwiązuje DCP z progiem  $\rho_0$  w klasycznym sensie i który zachowuje ten próg  $\rho_0$ .

Okazało się jednak, że wprowadzając niewielką modyfikację specyfikacji wyjściowej uzyskaliśmy nową wersję problemu DCP, którą może rozwiązać wiele ACCA (dla dowolnej konfiguracji początkowej, niezależnie od liczby komórek).

**Definicja 25 (sformułowanie problemu klasyfikacji gęstości początkowej w wersji "relaxed")** Niech  $\rho_0 \in (0, 1)$  oraz niech  $A_f$  będzie regułą globalną ACCA. Mówimy, że ten ACCA rozwiązuje DCP z progiem  $\rho_0$  w sensie "relaxed" jeśli dla wszystkich  $N \in \mathbb{N}$  istnieje  $T$  takie że dla wszystkich  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^N$  oraz  $t \geq T$  zachodzi:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) < \rho_0 &\Rightarrow A_f^t(\mathbf{x}) \in [0, \rho_0)^N \\ \rho(\mathbf{x}) > \rho_0 &\Rightarrow A_f^t(\mathbf{x}) \in (\rho_0, 1]^N\end{aligned}$$

Jeśli więc gęstość konfiguracji początkowej  $\mathbf{x}$  jest mniejsza (odpowiednio: większa) niż  $\rho_0$ , to wszystkie wartości  $x_i^t$  są mniejsze (odpowiednio: większe) od  $\rho_0$ , dla wystarczająco dużych  $t$ .

W pracy [N12] podana jest szczegółowa charakterystyka jednowymiarowych ACCA zachowujących gęstość o promieniu jeden. Ponadto ten artykuł zawiera również wyczerpujący opis dynamiki takich CA, z którego wynika, że prawie wszystkie z nich rozwiązują "relaxed" DCP.

W [N11] koncentruję się na klasycznym DCP i szukam ACCA, które mogą rozwiązać problem dla ustalonej liczby komórek  $N$ . (To ostatnie założenie jest motywowane faktem, że liczba elementów lokalnych w każdym problemie świata rzeczywistego jest skończona, a często nawet znana). Główne wyniki tego artykułu dotyczą dwóch aspektów. Przede wszystkim wyprowadzane są niezbędne warunki, znacznie ograniczające przestrzeń poszukiwań potencjalnych rozwiązań, co pozwala na zbudowanie efektywnego algorytmu wyszukiwania. Ponadto, podane jest kryterium zatrzymania algorytmu wyszukiwania, sprawdzające, czy dana reguła jest rozwiązaniem. Dalsza część artykułu ma charakter demonstracyjny i pokazuje, jak dzięki tym narzędziom udało się znaleźć klasyczne rozwiązania DCP dla  $N = 23$ .

Kolejna praca ([N9]) zawiera dyskusję na temat dwuwymiarowych ACCA z sąsiedztwem von Neumanna w kontekście rozwiązywania "relaxed" DCP. Skupiamy się na znalezieniu najbardziej wydajnych reguł rozwiązujących ten problem spośród reguł zachowujących gęstość, oceniając eksperymentalnie ACCA dla predefiniowanego zestawu początkowych konfiguracji.

W [N4] podany jest pełny opis dynamiki legalnych zewnętrznie-totalistycznych ACCA. Okazało się, że z jednej strony takie CA są najprostszym uogólnieniem ECA, z drugiej zaś układami dynamicznymi, wykazującymi pewne właściwości nie występujące w przypadku binarnym. Dzięki masowym symulacjom numerycznym byliśmy w stanie podzielić przestrzeń reguł na kilka klas o odrębnym zachowaniu. Unikalne połączenie symulacji komputerowych (niekiedy bardzo zaawansowanych) i wachlarza metod analitycznych pozwoliło odsłonić dynamikę każdego z tych ciągłych automatów komórkowych i potwierdzić wszystkie wyniki teoretycznie.

Uzyskane wyniki wskazują, że w rozpatrywanym zbiorze ACCA można zaobserwować wszystkie rodzaje wrażliwości:



- Wrażliwość na zmianę pojedynczej wartości w konfiguracji początkowej.
- Wrażliwość na zmianę liczby komórek w kracie.
- Wrażliwość na niewielkie zmiany parametrów reguły lokalnej.

## Automaty komórkowe na trójkątnych i sześciokątnych kratkach

Trójkątne podzielenie płaszczyzny zostało po raz pierwszy rozważone przez Bays [90] pod koniec ubiegłego stulecia. Trójkątne CA regularnie pojawiają się w różnych kontekstach (patrz np. [91–94]). Skupiam się na najprostszych trójkątnych CA: automatach, które aktualizują stany komórek tylko na podstawie stanów sąsiednich komórek. Nawet w tym przypadku nie było zadowalających wyników dla większości klasycznych CA; ponadto część wyników, które można znaleźć w literaturze (oraz w renomowanych czasopismach) jest błędna. To samo dotyczy siatek sześciokątnych.

Moje główne wyniki w zakresie CA na siatkach trójkątnych lub sześciokątnych zawarte są w następujących artykułach (w kolejności chronologicznej):

- [N10] Antoni Augustynowicz, Jan M. Baetens, Bernard De Baets, Adam Dzedzej, Anna Nenca, Barbara Wolnik: *A note on the reversibility of 2D cellular automata on hexagonal grids*, Journal of Cellular Automata, vol. 13, nr 5-6, 2018, pp. 521-526, 15 punktów, IF(0,776)

*Praca ta powstała jako wynik wspólnych dyskusji. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu. Mój wkład oceniam na 30%.*

- [N7] Barbara Wolnik, Maciej Dziemiańczuk, Bernard De Baets: *Recurrent misconceptions in the study of CA reversibility on triangular grids*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 31, nr 1, 2021, 2150014 (6 pages), 70 punktów, IF(2,836)

*Praca ta powstała jako wynik wspólnych dyskusji. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu. Mój wkład oceniam na 50%.*

- [N6] Barbara Wolnik, Antoni Augustynowicz, Maciej Dziemiańczuk, Bernard De Baets: *Reversibility of non-saturated linear cellular automata on finite triangular grids*, Chaos, vol. 31, nr 1, 2021, 013136 (9 pages), 140 punktów, IF(3,642)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie twierdzenia wraz z dowodami. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

- [N1] Barbara Wolnik, Anna Nenca, Bernard De Baets: *A decomposition theorem for number-conserving multi-state cellular automata on triangular grids*, Theoretical Computer Science, Elsevier B.V., vol. 953, 2023, nr 113795, s. 1-17, DOI:10.1016/j.tcs.2023.113795, 100 punktów, IF(1,002)

*Tematyka pracy została zaproponowana przeze mnie. W tej pracy mojego autorstwa są wszystkie twierdzenia wraz z dowodami. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu.*

Artykuły [N10] i [N7] zawierają kontrprzykłady pokazujące, że problem odwracalności dwuwymiarowych liniowych CA na skończonych siatkach sześciokątnych lub trójkątnych pozostaje nierozwiązany. W drugim przypadku zarówno dla zerowych, jak i okresowych warunków brzegowych. Dodatkowo [N8] zawiera przypuszczenie sugerujące poprawną charakterystykę odwracalności w przypadku zerowych warunków brzegowych.

W pracy [N6] proponuję nową metodę badania odwracalności określonego typu liniowych CA na siatkach trójkątnych z zerowymi warunkami brzegowymi (LCA), zwanych *nienasyconymi*, dla których co najmniej jeden współczynnik w wyrażeniu na regułę lokalną jest równy zero. Okazuje się, że ta metoda jest niezwykle prosta i skuteczna. W szczególności udało mi się udowodnić hipotezę wysuniętą w [N7], która poprawnie charakteryzuje odwracalność LCA badanych w [95]. Co więcej, moja metoda nie ogranicza się do bardzo wąskiej klasy siatek trójkątnych, których stan wynosi  $\mathbb{Z}_3$  (jak w [95]), ale działa dla dowolnej regularnej siatki trójkątnej i dowolnego ciała skończonego.

W [N1] badamy własność zachowywanie sumy stanów dla dwuwymiarowych CA zdefiniowanych na regularnej siatce trójkątnej, które aktualizują stany komórek tylko na podstawie stanów sąsiednich komórek. Nawet w tym bardzo prostym przypadku nie ma zadowalających wyników dla najbardziej klasycznych CA: tak zwanych  $k$ -ary CA, tzn. CA ze zbiorem stanów postaci  $Q = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ , gdzie  $k$  jest jakąś dodatnią liczbą całkowitą większą niż 1. W szczególności do tej pory nie było narzędzi do zliczenia wszystkich takich CA. Aby zbadać te trójkątne NCCA, zaadaptowaliśmy nowe podejście przedstawione w [30] ([H2]) dla NCCA zdefiniowanych na regularnej siatce kwadratowej. Pokazaliśmy, że dostosowanie tego toku rozumowania do układu siatek trójkątnych

proceedzi do pełnego rozwiązania problemu znalezienia wszystkich  $k$ -ary trójkątnych NCCA, niezależnie od wartości  $k$ .

Warto podkreślić, że generalnie wyliczenie wszystkich NCCA w danej sytuacji jest nie lada wyzwaniem. Na przykład nawet w najprostszym przypadku jednowymiarowych CA o promieniu jeden niewiele wiadomo. Do niedawna pełne listy były dostępne tylko dla binarnych, trójstanowych i czterostanowych takich NCCA, tzn., dla zbiorów stanów  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 1, 2\}$  and  $\{0, 1, 2, 3\}$  (zob., na przykład, [12]). Niedawno została znaleziona kompletna lista 1 876 088 314 quinary NCCA (dokonano tego za pomocą komputera i było to możliwe dzięki twierdzeniu o dekompozycji [30]). Brak jest natomiast jakichkolwiek wyników dla zbiorów stanów  $\{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$  dla  $k > 5$ .

Dla siatki kwadratowej z sąsiedztwem von Neumanna w dwóch wymiarach, nawet jeśli przyjmiemy symetrię rotacyjną (założenie bardzo naturalne przy modelowaniu różnych zjawisk, zwłaszcza fizycznych), sytuacja nie wygląda lepiej. Pełna lista dla zbioru stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  pojawiła się w 2015 roku (patrz [26]), natomiast dla zbioru stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  zrobiono to dopiero w 2021 roku, w wyniku bardzo technicznych i żmudnych rozważań (patrz [70]). Podejście z [70] zostało połączone z metodą dekompozycji, co pozwoliło znaleźć pełną listę NCCA rotacyjno-symetrycznych dla zbioru stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , niestety tylko przy pomocy komputera (lista jest dostępna jedynie jako zbiór danych). Jak dotąd podobna próba dla zbioru stanów  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  wciąż przekracza możliwości obliczeniowe komputerów. W przypadku siatki kwadratowej z sąsiedztwem Moore'a nie ma nawet listy wszystkich NCCA w przypadku binarnym.

Z powyższego przeglądu znanych wyników jest jasne, że wyliczenie wszystkich  $k$ -ary trójkątnych NCCA, niezależnie od wartości  $k$ , przedstawione w [N1], jest czymś dość nieoczekiwanym. W istocie wyliczenie to było możliwe tylko dzięki dodatkowym właściwościom rozkładu typu "split-and-perturb decomposition" dostosowanego do dwuwymiarowej siatki trójkątów, które niestety nie mają zastosowania przy rozważaniu innych siatek lub innych wymiarów, co czyni ten artykuł dość unikalnym.

## Stochastyczne Automaty Komórkowe

Stochastycznymi automatami komórkowymi zajmowałam się w następujących artykułach:

- [M3] Witold Bołt, Barbara Wolnik, Jan M. Baetens, Bernard De Baets: *On the identification of  $\alpha$ -asynchronous cellular automata in the case of partial observations with spatially separated gaps*, Challenging problems and solutions in intelligent systems / de Tré Guy [i in.](red.), Studies in Computational Intelligence, nr 634, 2016, Springer, ISBN 978-3-319-30164-8, pp. 23-36.

*Praca ta powstała jako wynik wspólnych dyskusji. W tej pracy mojego autorstwa jest m.in. teoretyczny background. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu. Mój wkład oceniam na 40%.*

- [M2] Witold Bołt, Aleksander Bołt, Barbara Wolnik, Jan M. Baetens, Bernard De Baets: *A statistical approach to the identification of Diploid Cellular Automata*, Theory and Practice of Natural Computing: 6th International Conference, TPNC 2017 Prague, Czech Republic, December 18-20, 2017, Proceedings / Martín-Vide Carlos, Neruda Roman, Vega-Rodríguez Miguel A. (red.), Lecture Notes In Computer Science, nr 10687, 2017, Springer, ISBN 978-3-319-71068-6, pp. 37-48.

*Praca ta powstała jako wynik wspólnych dyskusji. W tej pracy mojego autorstwa jest m.in. teoretyczny background. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu. Mój wkład oceniam na 30%.*

- [N8] Witold Bołt, Aleksander Bołt, Barbara Wolnik, Jan M. Baetens, Bernard De Baets: *A statistical approach to the identification of diploid cellular automata based on incomplete observations*, BioSystems, nr 186, 2019, 103976 (12 pages), 70 punktów, IF(1,808)

*Praca ta powstała jako wynik wspólnych dyskusji. W tej pracy mojego autorstwa jest m.in. teoretyczny background. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu. Mój wkład oceniam na 30%.*

- [M1] Jakub Neumann, Mirosław Szaban, Barbara Wolnik, Witold Bołt: *Statistical approach to the binary classification problem with the use of probabilistic cellular automata*, Przegląd badań na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego 2021 / Wiesław Laskowski, Marcin Marciniak, Krzysztof Szczygielski (red.), 2021, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, ISBN 978-83-8206-356-1, pp. 149-160

*Praca ta powstała jako wynik wspólnych dyskusji. W tej pracy mojego autorstwa jest teoretyczny background. Wspólna jest praca nad przygotowaniem manuskryptu artykułu. Mój wkład oceniam na 25%.*

Badania w tych artykułach są wynikiem współpracy z Research Unit Knowledge-Based Systems (KERMIT) z Ghent University. Moją rolą we wszystkich tych artykułach było dobranie odpowiednich narzędzi matematycznych i zadbanie o warstwę teoretyczną.

W [M3] przedstawiamy statystyczną metodę, opartą na częstościach, do identyfikowania tzw.  $\alpha$ -asynchronicznych automatów komórkowych z obserwacji cząstkowych, tj. wstępnie zapisanych konfiguracji z niektórymi komórkami

o nieznanym (brakującym) stanie. Przedstawiona metoda, oprócz znalezienia nieznanego automatu komórkowego, jest w stanie z dużą dokładnością uzupełnić brakujące wartości stanów.

W pracy [M2] skupiamy się na identyfikacji specjalnej klasy stochastycznych CA (SCA), zwanych diploidalnymi CA. Przedstawiona w pracy metoda identyfikacji jest rozwinięciem metody przedstawionej w [M3]. Przedstawione wyniki stanowią pierwszy krok w kierunku ustalenia ogólnej metody identyfikacji SCA, opartej na niepełnych obserwacjach, ponieważ każdy SCA można wyrazić w postaci kompozycji skończonej liczby deterministycznych CA, podczas gdy w diploidalnych CA dopuszcza się jedynie kompozycję dwóch takich CA.

Praca [N8] jest kontynuacją prac nad identyfikacją diploidalnych CA — omówiono przypadek obserwacji niepełnych. Celem algorytmu identyfikacji jest oszacowanie parametrów podstawowego SCA oraz oszacowanie brakujących stanów w obserwacjach.

W pracy [M1] przedstawiliśmy ogólny pomysł poprawy dokładności klasyfikatora opartego na CA, za pomocą statystyki: wielokrotnie powtarzając obliczenia i biorąc pod uwagę zagregowane wyniki, byliśmy w stanie poprawić dokładność klasyfikacji.

## **5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej**

Od 2016 roku prowadzę znaczącą działalność naukową na Uniwersytecie w Gandawie (dla jednostki badawczej KERMIT, Department of Data Analysis and Mathematical Modelling, Faculty of Bioscience Engineering, Ghent University, Belgium). Moja działalność naukowa w tej instytucji polegała początkowo głównie na matematycznym wsparciu badań z zakresu Afinicznych Ciągłych Automatów Komórkowych i Stochastycznych Automatów Komórkowych prowadzonych w KERMIT. Następnie została rozszerzona na inne zagadnienia z dziedziny automatów komórkowych. Dodatkowo, podczas moich pobytów naukowych w Gandawie (średnio raz w roku – z przerwą związaną z pandemią) prowadzę wykłady dla pracowników i doktorantów.

Daty moich pobytów w Uniwersytecie w Gandawie:

XII 2017 – jednodobowa wizyta naukowa: intensywna praca naukowa oraz wykłady dla pracowników i doktorantów.

I 2019 – jednodobowa wizyta naukowa: intensywna praca naukowa oraz wykłady dla pracowników i doktorantów.

VI 2019 – jednodobowa wizyta naukowa: intensywna praca naukowa oraz wykłady dla pracowników i doktorantów.

X 2022 – jednodobowa wizyta naukowa: intensywna praca naukowa oraz wykłady dla pracowników i doktorantów.

W związku z pandemią w latach 2020-2021 wyjazdy zostały zamienione na regularną pracę zdalną. Obecnie, mój status w Uniwersytecie w Gandawie to *affiliated professor* (<https://kermit.ugent.be/affiliated.php>) i w kilku ostatnich artykułach wskazana jest moja afiliacja z Uniwersytetem w Gandawie.

## **6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę**

### **Dydaktyka**

Od 1991 roku prowadzę zajęcia z różnych przedmiotów na Uniwersytecie Gdańskim, w szczególności: analiza matematyczna (różne poziomy), algebra liniowa, analiza funkcjonalna, układy dynamiczne, ekonomia matematyczna czy rachunek prawdopodobieństwa. Za swoją pracę dydaktyczną otrzymałam nagrodę „Nauczyciel Roku” im. Krzysztofa Celestyna Mrongowiusza (2012), przyznawaną za wybitne osiągnięcia dydaktyczne. Zdobyłam również dwukrotnie wyróżnienie w tym konkursie.

Oprócz tego mam wiele innych aktywności związanych z nauczaniem – poniżej niektóre z nich:

Jestem współautorem nowej specjalności na kierunku Matematyka: Matematyka ekonomiczna; nowego kierunku studiów: Modelowanie matematyczne i analiza danych oraz nowego kierunku na studiach doktoranckich: Interdisciplinary Doctoral Studies in Mathematical Modelling (IDSMM).

Prowadziłam seminaria wprowadzające narzędzia matematyczne dla Gdańskiego Uniwersytetu Medycznego.

Od 2006 roku jestem opiekunem studenckiego koła naukowego „Kolor”. W czasie swojej działalności „Kolor” zorganizował i przeprowadził wiele imprez naukowych (wykłady, konferencje, spotkania) oraz wiele imprez popularyzujących matematykę (warsztaty, konkursy).

Prowadziłam zajęcia na kursach wyrównawczych dla studentów rozpoczynających studia na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki.

W latach 2017 - 2019 byłam promotorem pomocniczym doktoranta, który pracował pod kierunkiem profesora Bernarda De Baetsa (Uniwersytet w Gandawie w Belgii). Doktorat został obroniony z wyróżnieniem (sugerowali to obaj recenzenci zagraniczni). Obecnie pracuję jako promotor pomocniczy z innym doktorantem.

Jestem współautorem kilku zbiorów zadań dla uczniów szkół średnich oraz jestem autorem jednego skryptu dla studentów.

Od ponad 15 lat prowadzę regularne zajęcia z matematyki dla uczniów uzdolnionych matematycznie (na różnych poziomach zaawansowania) – obecnie średnio 4 godziny tygodniowo.

W latach 2019 - 2021 pracowałam indywidualnie ze studentem Informatyki nad tematem automatów komórkowych. Swoje wyniki zaprezentowałam na międzynarodowej konferencji Automata & WAN 2021 (12-17 lipca 2021, Marsylia we Francji) oraz jest współautorem pracy „An exploration of reversible septenary number-conserving cellular automata” (zgłoszonej do Natural Computing).

### **Osiągnięcia organizacyjne**

Moja działalność organizacyjna jest bardzo szeroka — poniżej kilka najważniejszych przykładów:

Od 2016 roku pełnię funkcję Prodziekana ds. Studenckich i Kształcenia Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki. W roku akademickim 2009/2010 pełniłam funkcję Zastępcy Dyrektora ds. Kształcenia w Instytucie Matematyki.

Byłam głównym organizatorem i koordynatorem z ramienia Uniwersytetu Gdańskiego wydarzenia obejmującego całe województwo pomorskie: Rok Matematyki na Pomorzu 2015 (prace nad przygotowaniem i realizacją inicjatywy trwały od 2012 do 2016 roku). (<https://www.gdansk.pl/urząd-miejski/wiadomosci/matematyka-dla-kazdego-rok-matematyki-na-pomorzu,a,38308>)

Od 2016 roku jestem głównym koordynatorem projektu „Zdolni z Pomorza – Uniwersytet Gdański”. W ramach tej działalności odpowiadam za organizację różnych form wsparcia dla uzdolnionych uczniów z województwa pomorskiego (do tej pory wsparliśmy 4000 uczniów).

Organizowałam lub współorganizowałam również wiele mniejszych imprez, takich jak: konkurs studencki Mat2Tab (na matematyczne oprogramowanie edukacyjne) – 3 edycje; „Uniwersytet dla maturzystów” – kilka edycji; „Dziewczyny do ścisłych” (2011); Konkurs Informatyczny dla studentów „3CityCup” – kilka edycji; studenckie Konferencje ITAD – kilka edycji, żeby wymienić choć kilka.

### **Osiągnięcia w popularyzacji nauki**

Bardzo chętnie włączam się w popularyzację nauki, a moja działalność na tym polu jest bardzo bogata. Poniżej przedstawiam najważniejsze formy tej aktywności:

Wiele popularnonaukowych wykładów dla uczniów (obecnie średnio około 40 rocznie) z różnych dziedzin matematyki i jej zastosowań.

Kilka popularnonaukowych wykładów dla nauczycieli matematyki (głównie podczas niektórych konferencji dla nauczycieli).

Od 2013 roku jestem członkiem stowarzyszenia „bez rutyny”: <http://www.bezrutyny.pl/> – głównym celem stowarzyszenia jest popularyzacja matematyki i innych nauk wśród młodzieży. W ramach tej działalności jestem jednym z liderów odpowiedzialnych za koordynację i organizację Pomorskich Meczów Matematycznych – obecnie trwa ich siódma edycja. Co roku w zawodach bierze udział kilkadziesiąt szkół. Ponadto jestem współorganizatorem i wykładowcą na 15 obozach naukowych (Polygony Matematyczne).

Jestem wieloletnim członkiem Okręgowej Komisji Olimpiady Matematycznej.

Moja działalność organizacyjna i popularyzatorska została doceniona następującymi nagrodami:

2010 – Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za przygotowanie grantu na „Kierunki zamawiane” (zespołowa nagroda drugiego stopnia)

2014 – Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za projekt IDSMM (zespołowa nagroda drugiego stopnia)

2015 – Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za działalność organizacyjną (indywidualna nagroda drugiego stopnia)

2018 – Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za osiągnięcia dydaktyczne, edukacyjne i organizacyjne (indywidualna nagroda drugiego stopnia)

Na polu pracy naukowej otrzymałam następujące wyróżnienia:

2019 – Nagroda Naukowa Rektora Uniwersytetu Gdańskiego im. Profesora Karola Taylora

2021 – Nagroda Rektora Uniwersytetu Gdańskiego za osiągnięcia naukowe udokumentowane publikacjami (indywidualna nagroda drugiego stopnia)

**7. Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej.**

Ze względów osobistych moja kariera naukowa rozpoczęła się dopiero w 2016 roku. Wcześniej, po doktoracie, musiałam położyć większy nacisk na opiekę nad dziećmi, co było nie do pogodzenia z intensywną pracą naukową i wyjazdami badawczymi za granicę. Obecnie jestem liderem pięcioosobowego zespołu pracującego nad automatami komórkowymi (na Uniwersytecie Gdańskim) oraz mam status ”affiliated professor” na Uniwersytecie w Gandawie.

## Literatura

- [1] S. Ulam, On some mathematical problems connected with patterns of growth of figures, in: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 14, 1962, pp. 215–224.
- [2] J. von Neumann, Theory of Self-Reproducing Automata, University of Illinois Press, Champaign, IL, USA, 1966.
- [3] R. Bowness, M. A. Chaplain, G. G. Powathil, S. H. Gillespie, Modelling the effects of bacterial cell state and spatial location on tuberculosis treatment: Insights from a hybrid multiscale cellular automaton model, Journal of Theoretical Biology 446 (2018) 87 – 100. doi:10.1016/j.jtbi.2018.03.006.
- [4] T. Nagatani, K. Tainaka, Cellular automaton for migration in ecosystem: Application of traffic model to a predator–prey system, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 490 (2018) 803–807. doi:10.1016/j.physa.2017.08.151.
- [5] M. Bakhtiari, M. S. Salehi, Reconstruction of deformed microstructure using cellular automata method, Computational Materials Science 149 (2018) 1 – 13. doi:10.1016/j.commatsci.2018.02.053.
- [6] Z. Fu, Q. Jia, J. Chen, J. Ma, K. Han, L. Luo, A fine discrete field cellular automaton for pedestrian dynamics integrating pedestrian heterogeneity, anisotropy, and time-dependent characteristics, Transportation Research Part C: Emerging Technologies 91 (2018) 37 – 61. doi:10.1016/j.trc.2018.03.022.
- [7] S. Iwan, K. Kijewska, B. G. Johansen, O. Eidhammer, K. Małeck, W. Konicki, R. G. Thompson, Analysis of the environmental impacts of unloading bays based on cellular automata simulation, Transportation Research Part D: Transport and Environment 61 (2018) 104 – 117, innovative Approaches to Improve the Environmental Performance of Supply Chains and Freight Transportation Systems. doi:10.1016/j.trd.2017.03.020.
- [8] D. Caviedes-Voullième, J. Fernández-Pato, C. Hinz, Cellular automata and finite volume solvers converge for 2D shallow flow modelling for hydrological modelling, Journal of Hydrology 563 (2018) 411–417.
- [9] R. Zhang, Q. Tian, L. Jiang, A. Crooks, S. Qi, R. Yang, Projecting cropping patterns around poyang lake and prioritizing areas for policy intervention to promote rice: A cellular automata model, Land Use Policy 74 (2018) 248 – 260, land use and rural sustainability in China. doi:10.1016/j.landusepol.2017.09.040.
- [10] G. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of shift dynamical systems, Mathematical Systems Theory 3 (1969) 320–375.
- [11] A. Alhazov, K. Imai, Particle complexity of universal finite number-conserving cellular automata, in: 2016 Fourth International Symposium on Computing and Networking (CANDAR), 2016, pp. 209–214. doi:10.1109/CANDAR.2016.0045.
- [12] A. Moreira, N. Boccara, E. Goles, On conservative and monotone one-dimensional cellular automata and their particle representation, Theoretical Computer Science 325 (2) (2004) 285–316. doi:10.1016/j.tcs.2004.06.010.

- [13] M. Medenjak, K. Klobas, T. Prosen, Diffusion in deterministic interacting lattice systems, *Physical Review Letters* 119 (2017) 110603. doi:10.1103/PhysRevLett.119.110603.
- [14] G. 't Hooft, *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics*, Springer International Publishing, 2016, *Fundamental Theories of Physics*, Vol. 185. doi:10.1007/978-3-319-41285-6.
- [15] U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau, Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation, *Physical Review Letters* 56 (1986) 1505–1508. doi:10.1103/PhysRevLett.56.1505.
- [16] J. Hardy, O. de Pazzis, Y. Pomeau, Molecular dynamics of a classical lattice gas: Transport properties and time correlation functions, *Physical Review A* 13 (1976) 1949–1961. doi:10.1103/PhysRevA.13.1949.
- [17] V. Belitsky, J. Krug, E. J. Neves, G. Schütz, A cellular automaton model for two-lane traffic, *Journal of Statistical Physics* 103 (5-6) (2001) 945–971. doi:10.1023/A:1010361022379.
- [18] B. S. Kerner, S. L. Klenov, D. E. Wolf, Cellular automata approach to three-phase traffic theory, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 35 (47) (2002) 9971. doi:10.1088/0305-4470/35/47/303.
- [19] J. Matsukidaira, K. Nishinari, Euler-Lagrange correspondence of cellular automaton for traffic-flow models, *Physical Review Letters* 90 (2003) 088701. doi:10.1103/PhysRevLett.90.088701.
- [20] Y. Xiang, Z. Liu, J. Liu, Y. Liu, C. Gu, Integrated traffic-power simulation framework for electric vehicle charging stations based on cellular automaton, *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy* 6 (4) (2018) 816–820. doi:10.1007/s40565-018-0379-3.
- [21] N. Boccara, H. Fukús, Number-conserving cellular automaton rules, *Fundamenta Informaticae* 52 (1-3) (2002) 1–13.
- [22] B. Durand, E. Formenti, Z. Róka, Number-conserving cellular automata I: decidability, *Theoretical Computer Science* 299 (1) (2003) 523–535. doi:10.1016/S0304-3975(02)00534-0.
- [23] M. Pivato, Conservation laws in cellular automata, *Nonlinearity* 15 (6) (2002) 1781–1793. doi:10.1088/0951-7715/15/6/305.
- [24] J. Kari, S. Taati, A particle displacement representation for conservation laws in two-dimensional cellular automata, in: *Journées Automates Cellulaires, Proceedings, 2008*, pp. 65–73.
- [25] N. Tanimoto, K. Imai, A characterization of von Neumann neighbor number-conserving cellular automata, *Journal of Cellular Automata* 4 (2009) 39–54.
- [26] K. Imai, H. Ishizaka, V. Poupet, 5-state rotation-symmetric number-conserving cellular automata are not strongly universal, in: T. Isokawa, K. Imai, N. Matsui, F. Peper, H. Umeo (Eds.), *Cellular Automata and Discrete Complex Systems*, Springer International Publishing, Cham, 2015, pp. 31–43.
- [27] B. Wolnik, A. Dzedzej, J. M. Baetens, B. D. Baets, Number-conserving cellular automata with a von Neumann neighborhood of range one, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50 (43) (2017) 435101.
- [28] M. Dembowski, B. Wolnik, W. Bolt, J. M. Baetens, B. De Baets, Two-dimensional affine continuous cellular automata solving the relaxed density classification problem, *Journal of Cellular Automata* 14 (3/4) (2019) 191–212.
- [29] B. Wolnik, A. Dzedzej, J. M. Baetens, B. De Baets, Number-conserving cellular automata with a von Neumann neighborhood of range one, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50 (43) (2017) 435101. doi:10.1088/1751-8121/aa89cf.
- [30] B. Wolnik, A. Nenca, J. M. Baetens, B. De Baets, A split-and-perturb decomposition of number-conserving cellular automata, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 413 (2020) 132645. doi:10.1016/j.physd.2020.132645.
- [31] F. G. Pazzona, G. Pireddu, P. Demontis, Quasiequilibrium multistate cellular automata, *Physical Review E* 105 (1) (2022) 014116.
- [32] E. L. Ruivo, P. P. de Oliveira, F. Lobos, E. Goles, Shift-equivalence of  $k$ -ary, one-dimensional cellular automata rules, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 63 (2018) 280–291.
- [33] K. Bhattacharjee, S. Das, Reversibility of  $d$ -state finite cellular automata, *Journal of Cellular Automata* 11 (2016) 213–245.

- [34] N. Boccara, H. Fuk s, Number-conserving cellular automaton rules, *Fundamenta Informaticae* 52 (1-3) (2002) 1–13.
- [35] S. Ross, *A First Course in Probability*, Pearson Education, 2011.
- [36] B. Wolnik, B. De Baets, All binary number-conserving cellular automata based on adjacent cells are intrinsically one-dimensional, *Physical Review E* 100 (2019) 022126. doi:10.1103/PhysRevE.100.022126.
- [37] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, *Reviews of Modern Physics* 55 (3) (1983) 601–644. doi:10.1103/RevModPhys.55.601.
- [38] M. Land, R. K. Belew, No perfect two-state cellular automata for density classification exists, *Physical Review Letters* 74 (1995) 5148–5150.
- [39] B. Wolnik, B. De Baets, Ternary reversible number-conserving cellular automata are trivial, *Information Sciences* 513 (2020) 180–189. doi:10.1016/j.ins.2019.10.068.
- [40] D. Richardson, Tessellation with local transformations, *Journal of Computer and System Sciences* 6 (1972) 373–388.
- [41] S. Amoroso, Y. Patt, Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures, *Journal of Computer and System Sciences* 6 (1972) 448–464.
- [42] S. Di Gregorio, G. Trautteur, On reversibility in cellular automata, *Journal of Computer and System Sciences* 11 (1975) 382–391.
- [43] K. Sutner, De Bruijn graphs and linear cellular automata, *Complex Systems* 5 (1991) 19–30.
- [44] A. M. del Rey, A note on the reversibility of elementary cellular automaton 150 with periodic boundary conditions, *Romanian Journal of Information Science and Technology* 16 (2013) 365–372.
- [45] A. M. del Rey, G. R. Sánchez, On the reversibility of 150 Wolfram cellular automata, *International Journal of Modern Physics C* 17 (2006) 975–983.
- [46] L. H. Encinas, A. M. del Rey, Inverse rules of ECA with rule number 150, *Applied Mathematics and Computation* 189 (2007) 1782–1786.
- [47] P. Sarkar, R. Barua, The set of reversible 90/150 cellular automata is regular, *Discrete Applied Mathematics* 84 (1998) 199–213.
- [48] J. Kari, Reversibility of 2D cellular automata is undecidable, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 45 (1990) 379–385.
- [49] A. K. Das, A. Ganguly, A. Dasgupta, S. Bhawmik, P. P. Chaudhuri, Efficient characterisation of cellular automata, *IEE Proceedings E - Computers and Digital Techniques* 137 (1990) 81–87.
- [50] A. M. del Rey, G. R. Sánchez, Reversibility of linear cellular automata, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 8360 – 8366. doi:10.1016/j.amc.2011.03.033.
- [51] J. C. S. T. Mora, Matrix methods and local properties of reversible one-dimensional cellular automata, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 35 (2002) 5563–5573. doi:10.1088/0305-4470/35/27/303.
- [52] D. H. Serrano, A. M. del Rey, A closed formula for the inverse of a reversible cellular automaton with  $(2r+1)$ -cyclic rule, *Applied Mathematics and Computation* 357 (2019) 23–34. doi:10.1016/j.amc.2019.03.060.
- [53] M. It o, N.  sato, M. Nasu, Linear cellular automata over  $Z_m$ , *Journal of Computer and System Sciences* 27 (1983) 125–140. doi:10.1016/0022-0000(83)90033-8.
- [54] A. Dennunzio, E. Formenti, L. Manzoni, L. Margara, A. E. Porreca, On the dynamical behaviour of linear higher-order cellular automata and its decidability, *Information Sciences* 486 (2019) 73–87. doi:10.1016/j.ins.2019.02.023.
- [55] G. Manzini, L. Margara, Invertible linear cellular automata over  $Z_m$ : Algorithmic and dynamical aspects, *Journal of Computer and System Sciences* 56 (1998) 60–67. doi:10.1006/jcss.1997.1535.
- [56] B. Yang, C. Wang, A. Xiang, Reversibility of general 1D linear cellular automata over the binary field  $Z_2$  under null boundary conditions, *Information Sciences* 324 (2015) 23–31.

- [57] C.-H. Chang, H. Chang, On the Bernoulli automorphism of the reversible linear cellular automata, *Information Sciences* 345 (2016) 217–225.
- [58] J. Kari, Theory of cellular automata: A survey, *Theoretical Computer Science* 334 (2005) 3 – 33. doi: 10.1016/j.tcs.2004.11.021.
- [59] J. Kari, Reversible cellular automata: From fundamental classical results to recent developments, *New Generation Computing* 36 (2018) 145–172. doi:10.1007/s00354-018-0034-6.
- [60] K. Morita, *Reversible Cellular Automata*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012, pp. 231–257. doi:10.1007/978-3-540-92910-9\_7.
- [61] A. Augustynowicz, J. M. Baetens, B. De Baets, A. Dzedzej, A. Nenca, B. Wolnik, A note on the reversibility of 2d cellular automata on hexagonal grids, *Journal of Cellular Automata* 13 (5/6) (2018) 521 – 525.
- [62] B. Wolnik, M. Dziemiańczuk, B. De Baets, Recurrent misconceptions in the study of CA reversibility on triangular grids, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 31 (1) (2021) 2150014, 1–6.
- [63] Dzedzej, Adam and Wolnik, Barbara and Nenca, Anna and Baetens, Jan and De Baets, Bernard, Efficient enumeration of three-state two-dimensional number-conserving cellular automata, *Information and Computation* 274 (2020) 14. doi:10.1016/j.ic.2020.104534.
- [64] A. Dzedzej, B. Wolnik, M. Dziemiańczuk, A. Nenca, J. M. Baetens, B. D. Baets, A two-layer representation of four-state reversible number-conserving 2d cellular automata, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2019 (7) (2019) 073202. doi:10.1088/1742-5468/ab25df.
- [65] A. Schranko, P. P. B. De Oliveira, Derivation and representation of one-dimensional, reversible, number-conserving cellular automata rules, *Journal of Cellular Automata* 6 (2011) 77–89.
- [66] F. García-Ramos, Product decomposition for surjective 2-block NCCA, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* (2011) 147–158.
- [67] K. Morita, *One-Dimensional Universal Reversible Cellular Automata*, Springer Japan, Tokyo, 2017, Ch. 11, pp. 299–329. doi:10.1007/978-4-431-56606-9\_11.
- [68] K. Imai, B. Martin, R. Saito, On radius 1 nontrivial reversible and number-conserving cellular automata, in: *Reversibility and Universality*, Springer, 2018, pp. 269–277. doi:10.1007/978-3-319-73216-9\_12.
- [69] B. Durand, Inversion of 2D cellular automata: some complexity results, *Theoretical Computer Science* 134 (2) (1994) 387–401.
- [70] A. Dzedzej, B. Wolnik, A. Nenca, J. M. Baetens, B. De Baets, Two-dimensional rotation-symmetric number-conserving cellular automata, *Information Sciences* 577 (2021) 599–621. doi:10.1016/j.ins.2021.06.041.
- [71] B. Wolnik, A. Nenca, A. Dzedzej, B. De Baets, Seven-state rotation-symmetric number-conserving cellular automaton that is not isomorphic to any septenary one, *Physical Review E* 107 (2023) 024211. doi: 10.1103/PhysRevE.107.024211.
- [72] B. Wolnik, N. Mrozek, A. Dzedzej, D. Bernard, Three-dimensional rotation-symmetric number-conserving cellular automata, *Journal of Cellular Automata* 15 (4) (2020) 243–259.
- [73] G. Cattaneo, P. Flocchini, G. Mauri, C. Vogliotti, N. Santoro, Cellular automata in fuzzy backgrounds, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 105 (1) (1997) 105–120.
- [74] H. Betel, P. Flocchini, On the asymptotic behavior of fuzzy cellular automata, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 252 (2009) 23–40.
- [75] P. Flocchini, F. Geurts, A. Mingarelli, N. Santoro, Convergence and aperiodicity in fuzzy cellular automata: Revisiting rule 90, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 142 (1) (2000) 20–28.
- [76] H. Betel, P. Flocchini, On the relationship between Boolean and fuzzy cellular automata, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 252 (2009) 5–21.
- [77] W. Bolt, J. M. Baetens, B. De Baets, On the decomposition of stochastic cellular automata, *Journal of Computational Science* 11 (2015) 245–257. doi:10.1016/j.jocs.2015.09.004.
- [78] P. Gács, G. L. Kurdyumov, L. A. Levin, One-dimensional uniform arrays that wash out finite islands, *Problemy Peredachi Informatsii* 14 (3) (1978) 92–96.



- [79] N. H. Packard, Adaptation toward the edge of chaos, in: J. A. S. Kelso, A. J. Mandell, M. F. Shlesinger (Eds.), *Dynamic Patterns in Complex Systems*, World Scientific, 1988, pp. 293–301.
- [80] A. Bušić, N. Fatès, J. Mairesse, I. Marcovici, Density classification on infinite lattices and trees, *Electronic Journal of Probability* 18 (2013) 22 pp. doi:10.1214/EJP.v18-2325.
- [81] M. Mitchell, J. P. Crutchfield, R. Das, Evolving cellular automata with genetic algorithms: A review of recent work, in: *Proceedings of the First International Conference on Evolutionary Computation and Its Applications (EvCA'96)*, 1996.
- [82] P. P. de Oliveira, J. C. Bortot, G. M. Oliveira, The best currently known class of dynamically equivalent cellular automata rules for density classification, *Neurocomputing* 70 (1–3) (2006) 35 – 43, *neural Networks Selected Papers from the 7th Brazilian Symposium on Neural Networks (SBRN '04) 7th Brazilian Symposium on Neural Networks*. doi:10.1016/j.neucom.2006.07.003.
- [83] H. Fukś, Solution of the density classification problem with two cellular automata rules, *Physical Review E* 55 (1997) 2081–2084.
- [84] C. Stone, L. Bull, Solving the density classification task using cellular automaton 184 with memory, *Complex Systems* 18 (3) (2009) 329.
- [85] H. Fukś, Nondeterministic density classification with diffusive probabilistic cellular automata, *Physical Review E* 66 (2002) 066106. doi:10.1103/PhysRevE.66.066106.
- [86] M. Schüle, T. Ott, R. Stoop, Computing with probabilistic cellular automata, in: C. Alippi, M. Polycarpou, C. Panayiotou, G. Ellinas (Eds.), *Artificial Neural Networks – ICANN 2009: 19th International Conference, Limassol, Cyprus, September 14-17, 2009, Proceedings, Part II*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 525–533. doi:10.1007/978-3-642-04277-5\_53.
- [87] N. Fatès, Stochastic cellular automata solutions to the density classification problem - when randomness helps computing, *Theory of Computing Systems* 53 (2) (2013) 223–242. doi:10.1007/s00224-012-9386-3.
- [88] M. S. Capcarrère, M. Sipper, M. Tomassini, Two-state,  $r = 1$  cellular automaton that classifies density, *Physical Review Letters* 77 (1996) 4969–4971.
- [89] R. Briceño, P. M. de Espanés, A. Osses, I. Rapaport, Solving the density classification problem with a large diffusion and small amplification cellular automaton, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 261 (2013) 70 – 80. doi:10.1016/j.physd.2013.07.002.
- [90] C. Bays, Cellular automata in the triangular tessellation, *Complex Systems* 8 (1994) 127–150.
- [91] M. Zawidzki, Application of semitotalistic 2d cellular automata on a triangulated 3d surface, *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics* 6 (2011) 34–51. doi:10.2495/DNE-V6-N1-34-51.
- [92] R. Alonso-Sanz, A structurally dynamic cellular automaton with memory in the triangular tessellation, *Complex Systems* 17 (2007) 1–15.
- [93] G. M. Ortigoza, Unstructured triangular cellular automata for modeling geographic spread, *Applied Mathematics and Computation* 258 (C) (2015) 520–536. doi:10.1016/j.amc.2015.01.116.
- [94] J. Ji, L. Lu, Z. Jin, S. Wei, L. Ni, A cellular automata model for high-density crowd evacuation using triangle grids, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 509 (2018) 1034–1045. doi:10.1016/j.physa.2018.06.055.
- [95] S. Uguz, S. Redjepov, E. Acar, H. Akin, Structure and reversibility of 2d von neumann cellular automata over triangular lattice, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 27 (06) (2017) 1750083. doi:10.1142/S0218127417500833.