

Recenzja rozprawy doktorskiej:

Krzysztof Kowitz

WYKORZYSTANIE PORZĄDKU KATĚTOVA W BADANIACH PRZESTRZENI TÓPOLOGICZNYCH ORAZ ULTRAFILTRÓW

(13 listopada 2023)

Przedstawiona rozprawa doktorska dotyczy klasyfikacji różnych naturalnych ideałów na zbiorze liczb naturalnych, a dokładniej na zbiorze potęgowym $\mathcal{P}\omega$. Ideały te odpowiadają obrazom homomorficznym algebry Boole'a $\mathcal{P}\omega$, a w praktyce chodzi o obrazy homomorficzne znacznie ciekawszej algebry $\mathcal{P}\omega/\text{fin}$. Dualność Stone'a daje też odpowiedniość pomiędzy podzbiorami domkniętymi uzwarzenia Čecha-Stone'a, a zwłaszcza tymi, które omijają wszystkie punkty izolowane. Głównym narzędziem do porównywania jest porządek Katětova \leq_K , który można przetłumaczyć następująco: Algebra Boole'a A jest w relacji \leq_K z algebrą B , jeśli istnieje odpowiedni epimorfizm z B na A , dokładniej, indukowany przez odwzorowanie $f: \omega \rightarrow \omega$. Chodzi tu oczywiście o algebry ilorazowe postaci $\mathcal{P}\omega/\mathcal{I}$. Mogłoby się wydawać, że jest to bardzo skrajny temat, ale z drugiej strony ideały w $\mathcal{P}\omega$ bywają całkiem wymyślne i miewają nietrywialne własności kombinatoryczne, czasami zahaczające o ciekawe aspekty teorii liczb.

Autor rozprawy bada i klasyfikuje 13 naturalnych i wcześniej znanych ideałów. Jedno z ważnych zagadnień to jednorodność, czyli kiedy algebra postaci $\mathbb{A} = \mathcal{P}\omega/\mathcal{I}$ jest izomorficzna z każdą algebrą indukowaną przez niezerowy element. Topologicznie, chodzi tu o jednorodność ze względu na podzbiory domknięto-otwarte, to znaczy kiedy przestrzeń zwarta 0-wymiarowa jest homeomorficzna z każdą jej niepustą podprzestrzenią domknięto-otwartą. Co ciekawe, w przedstawionej rozprawie można znaleźć sporo pytań otwartych dotyczących jednorodności rozważanych ideałów, co oznacza, że temat jest jak najbardziej aktualny i warty dalszych badań.

Rozprawa opiera się zasadniczo na następujących opublikowanych artykułach:

- (1) K. Kowitz, *The relationship between Dfin-ultrafilter and Q-point*. Topology Appl. 335 (2023), Paper No. 108597, 8 pp.
- (2) R. Filipów, K. Kowitz, A. Kwela, *Characterizing existence of certain ultrafilters*. Ann. Pure Appl. Logic 173 (2022), no. 9, Paper No. 103157, 31 pp.
- (3) K. Kowitz, *Differentially compact spaces*. Topology Appl. 307 (2022), Paper No. 107948, 9 pp.

- (4) R. Filipów, K. Kowitz, A. Kwela, J. Tryba, *New Hindman spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), no. 2, 891–902.

Ponadto, najnowsze wyniki, wspomniane na końcu rozprawy pochodzą z nowego preprintu

- (5) R. Filipów, K. Kowitz, A. Kwela, *A unified approach to Hindman, Ramsey and van der Waerden spaces*, 48 stron, <https://arxiv.org/abs/2307.06907>

Na arXiv.org znalazłem jeszcze jeden preprint

- (6) R. Filipów, K. Kowitz, A. Kwela, *Katětov order between Hindman, Ramsey, van der Waerden and summable ideals*, 16 stron, <https://arxiv.org/abs/2307.06881>

który w ogóle nie jest w rozprawie wspomniany, chociaż dotyczy ściśle tematu rozprawy. Jest to niewątpliwie bardzo dobry dorobek: wszystkie cztery artykuły ukazały się w całkiem prestiżowych czasopismach, przy czym połowa z nich jest samodzielna. Najnowszy preprint (5) jest całkiem obszerny (prawie 50 stron!) i zawiera sporo ciekawych wyników dotyczących ideałów związanych z twierdzeniami podziałowymi, co jest ważną częścią kombinatoryki nieskończonościowej.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów i kończy się tabelką podsumowującą wszystkie znane Autorowi zależności pomiędzy wspomnianymi ideałami. Pierwsze dwa rozdziały zawierają wymagane definicje, różne podstawowe fakty i własności, przy czym niektóre z nich są nowe i pochodzą z prac Autora.

Rozdział 3 zajmuje się klasyfikacją tzw. \mathcal{I} -ultrafiltrów, gdzie \mathcal{I} jest ideałem. W języku topologicznym chodzi o punkty przestrzeni ω^* których nie da się przekształcić poprzez żadne odwzorowanie ciągłe indukowane przez liczby naturalne w zbiór domknięty $K \subset \omega^*$ odpowiadający ideałowi \mathcal{I} . Odwzorowanie $f: \beta\omega \rightarrow \beta\omega$ jest indukowane przez liczby naturalne, jeśli jest (jedynym) przedłużeniem ciągłym jakiegoś odwzorowania typu $f_0: \omega \rightarrow \omega$. Rozdział 3 zawiera nowe wyniki, częściowo pochodzące z samodzielnej pracy Autora (1), częściowo z pracy wspólnej z promotorem Rafałem Filipówem oraz Adamem Kwelą (2). Główny pomysł to odnalezienie i opisanie ogólnego schematu pojawiającego w kilku pracach Jany Flaškovéj z poprzedniej dekady, studiujących istnienie \mathcal{I} -ultrafiltrów, które nie są \mathcal{J} -ultrafiltrami, dla par ideałów \mathcal{I}, \mathcal{J} .

Rozdział 4 omawia różne kombinatoryczne osłabienia ciągłej zwartości, używając ideałów. W szczególności, pojawia się tam pojęcie przestrzeni różnicowo zwartej, badanej przez Autora w samodzielnej pracy (3). W porównywaniu klas przestrzeni \mathcal{I} -zwartych (gdzie \mathcal{I} jest ustalonym ideałem) ważną rolę odgrywa odpowiednio przetłumaczony porządek Katětova.

Rozdział 5 podsumowuje różne zależności pomiędzy badanymi ideałami, wykorzystując znane wcześniej warianty porządku Katětova, mianowicie porządek Rudin-Keislera oraz Rudin-Blassa (pochodzące od Mary Ellen Rudin, H. Jerome Keislera oraz

Andreas Blassa). Rozdział ten zawiera też kilka naturalnych pytań otwartych i kończy się wspomnianą wcześniej tabelą zależności.

Wkład Autora w wynikach przedstawionych w rozprawie jest zdecydowanie znaczący, a dowodzą tego chociażby dwie samodzielne publikacje. Widać, że Autor świetnie orientuje się w temacie i potrafi znaleźć pomysłowe argumenty dowodowe. Rozprawa zostawia też sporo naturalnych problemów otwartych, które wydają się być możliwe do rozwiązania, poprzez odpowiednie rozwinięcie znanych technik. Badanie narostu Čecha-Stone'a oraz jej podzbiorów ma znaczenie nie tylko w topologii czy też teorii algebr Boole'a, ale także w kombinatoryce i algebrze, co potwierdza dość bogata literatura, przykładowo, klasyczna książka Hindmana i Strauss, *Algebra in the Stone-Cech Compactification* (drugie wydanie 2012).

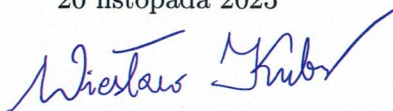
Poniżej kilka drobnych uwag krytycznych. Wszystkie dotyczą strony redakcyjnej i nie wpływają na ogólną bardzo pozytywną ocenę rozprawy.

1. W pracy można znaleźć dość liczne anglicyzmy (przymiotnik przed rzeczownikiem).
2. Strona 25: Drobną niekonsekwencją, najpierw \leq_P , a dalej \leq_{1-1} .
3. Strona 28: Powinno być $f[C]$ zamiast $f_\alpha[C]$ (w kilku miejscach).
4. Przydałby się skorowidz symboli, nie każdy czytelnik od razu zapamięta symbole oznaczające 13 badanych ideałów; to samo dotyczy różnych porządków.
5. Co z preprintem (6) wspomnianym powyżej?

Konkluzja. Przedstawiona rozprawa doktorska zawiera nowe i nietrywialne wyniki, w większości opublikowane w dość prestiżowych czasopismach naukowych. Bardziej formalnie: Przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustanowione przez Artykuł 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2022 r. poz. 574 ze zm.).

Wnoszę o dopuszczenie Autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego. Jednocześnie, biorąc pod uwagę znaczący dorobek własny Autora, uważam rozprawę za **wyróżniającą**.

20 listopada 2023



Wiesław Kubiś

Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences