

dr hab. Małgorzata Filipczak  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytetu Łódzkiego  
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź

**Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Krzysztofa Kowitza  
„Wykorzystanie porządku Katétova w badaniach przestrzeni topologicznych oraz  
ultrafiltrów”**

Rozprawa doktorska Pana magistra Krzysztofa Kowitza poświęcona jest własnościom i zastosowaniom ideałów podzbiorów  $\omega$ . Pośród badanych własności Autor poświęca szczególną uwagę niedawno wprowadzonym pojęciom jednorodności ideałów a także własnościom związanym ze zbieżnością ideałową. Porządek Katétova i dwa współczynniki kardynalne pozwalają na uogólnienie wyników Jany Flaškovej dotyczących pewnych ultrafiltrów. Praca prezentuje także zastosowania wprowadzonego aparatu do badania tak zwanych I-przestrzeni topologicznych ze szczególnym uwzględnieniem przestrzeni różnicowo zwartych i przestrzeni Hindmana.

Rozprawa liczy 80 stron maszynopisu i składa się ze streszczeń w języku polskim i angielskim, pięciu rozdziałów i bibliografii zawierającej 70 pozycji.

W krótkim rozdziale 1 wprowadzono podstawowe pojęcia i oznaczenia. Rozdział drugi przedstawia wybrane własności 13-tu ideałów –  $Fin$ ,  $I_d$ ,  $I_u$ ,  $I_{1/n}$ ,  $W$ ,  $D$ ,  $D_{fin}$ ,  $F$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $T$ ,  $A$  oraz  $I_{PS}$ . Autor przedstawia istniejące wyniki i uzupełnia je o własne przykłady i dowody. W rezultacie otrzymujemy pełną informację które z rozważanych ideałów są gęste, mają własność BW, FinBW, hBW i FinhBW, są P-ideałami a także jaka jest ich klasa borelowska. W pięciu przypadkach pozostaje otwarte pytanie o jednorodność. W podrozdziale 2.2 dostajemy niemal pełną informację dotyczącą zawierania między rozważanymi ideałami (jedyną niewiadomą pozostaje hipoteza Erdösa-Turána). Dodatkowe zależności między tymi 13-toma ideałami omówione są w ostatnim rozdziale zakończonym podsumowującą tabelą 5.1.

W najobszerniejszym rozdziale trzecim wprowadzone zostały cztery kolejne ideały –  $Fin^2$ ,  $ED$ ,  $ED_{Fin}$  oraz  $conv$ . Zapowiedziany w tytule porządek Katétova, który w ogóle nie występuje w rozdziale 2, spełnia tu pierwszorzędną rolę. Obok porządku Katétova ( $\leq_K$ ) rozważane są także porządek Katétova-Blassa ( $\leq_{KB}$ ) oraz porządek generowany przez rodzinę funkcji różnowartościowych ( $\leq_P$ ). Przy ich pomocy zdefiniowane zostały I-ultrafiltry, słabe I-ultrafiltry oraz I-punkty. Rozważanych jest też kilka innych pojęć związanych z ultrafiltrami (m.in. P-punkty, Q-punkty i ultrafiltry selektywne) oraz zależności między nimi. Rozważany jest także inny porządek związany z ultrafiltrami. Ponadto, przy użyciu współczynnika kardynalnego  $flip(I, J, F)$  związanego z parą ideałów  $I, J$  oraz rodziną funkcji  $F$  konstruowane są I-ultrafiltry, które nie są J-ultrafiltrami. Wreszcie, udowodnione są pewne własności ideałów  $L$  i  $T$  zapowiedziane w rozdziale 2.

W rozdziale czwartym porządek Katétova wykorzystany jest do badania  $I$ -przestrzeni, przestrzeni Hindmana oraz przestrzeni różnicowo zwartych. Pokazano, że jednopunktowe uzwarcenie Aleksandrowa przestrzeni Mrówki nie jest przestrzenią różnicowo zwartą (tw. 4.6) oraz że istnieje  $I$ -przestrzeń, która nie jest przestrzenią różnicowo zwartą (tw. 4.10). Rozstrzygnięto także kiedy przestrzeń Hindmana jest (a kiedy nie jest)  $I$ -przestrzenią (tw. 4.11 i 4.17).

Wyniki zawarte w rozprawie oceniam wysoko. Autor wykazał się znajomością wielu zagadnień związanych z różnymi działami matematyki. O orientacji w aktualnych badaniach świadczy choćby fakt, że 48 pozycji wymienionych w bibliografii to prace opublikowane po 2000 roku. W drugim i piątym rozdziale zebrana została imponująca ilość istniejących w literaturze twierdzeń i przykładów prezentujących własności wybranych ideałów. Własnymi wynikami Autorowi udało się "domknąć" problematykę i znacznie wzbogacić wiedzę dotyczącą zarówno własności jak i wzajemnych zależności omawianych trzynastu ideałów w kontekście zawierania oraz porządku Katétova (a także porządków Rudina-Keislera i Rudina-Blassa). Naturalne i interesujące wydają się też postawione w pracy problemy.

Rozdziały 3. i 4. zawierają wierne tłumaczenie czterech artykułów, których autorem lub współautorem jest mgr Krzysztof Kowitz, wzbogacone niekiedy o szczegóły dowodowe. Wyniki są interesujące, zabrakło jednak w moim odczuciu bardziej przemyślanej redakcji, która uczyniłaby prezentowaną rozprawę spójną całością. Dla przykładu, kluczowe dla pracy pojęcie porządku Katétova zostało zdefiniowane na stronie 6 i – powtórnie, wśród dwóch innych – na stronie 25. Pojęcie ideału jednorodnego, intensywnie badane w rozdziale drugim, zdefiniowane zostało ponownie – w nieco innym kontekście, bez żadnego odwołania do poprzednich rozważań – w rozdziale trzecim (str. 29). Pewne sformułowania, naturalne w tłumaczonych artykułach, brzmią nieco niezręcznie w rozprawie – na przykład w sformułowaniu twierdzenia 4.19, na 70-tej stronie pracy poświęconej porządkowi Katétova, znajdujemy wyjaśnienie co to znaczy, że dla ideałów  $I_{1/n}$  oraz  $H$  nie zachodzi warunek  $\leq_K$ . Szkoda też, że w drugim rozdziale Autor nie wspomniał o zależnościach między rozważanymi własnościami BW, FinBW, hBW, FinhBW oraz  $F_\sigma$ .

Praca została napisana ładnym językiem, dowody są klarowne. Jedyną istotną wątpliwość budzi dowód twierdzenia 3.10 na stronie 30, gdzie wykorzystywane jest twierdzenie Bella, chociaż ani z założeń, ani z treści dowodu nie wynika jasno, że liczba pseudoprzekroju  $\mathfrak{p}$  jest równa continuum. Nieco zaskakujące jest zdanie na stronie 38 (wiersz 11) o założeniach "w powyższym wniosku". Powyższy wniosek nie istnieje. Domyślam się, że uwaga dotyczy stwierdzenia 3.24. Ponadto, na stronie 75, wierszach 3-4 znalazło się zdanie sugerujące, że relacja równości ideałów i relacja izomorficzności ideałów są porządkami.

Znalazłam tylko kilka błędów językowych i edytorskich ("antysymetryczność" zamiast "antysymetria" na stronach 30 i 41, konstrukcja "Jeżeli ..., wtedy..." w sformułowaniu stwierdzenia 3.27 oraz zdecydowany nadmiar nawiasów zamykających na stronach 39, 40 i 54). Biorąc pod uwagę długość rozprawy i bogactwo zawartych w niej wyników świadczy to o staranności Autora.

**Jestem przekonana, że opiniowana rozprawa spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim, wnoszę więc o jej przyjęcie i dopuszczenie autora, magistra Krzysztofa Kowitza, do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Małgorzata Filipczak