



---

Prof. zw. dr hab. Adam Miranowicz  
Instytut Spintroniki i Informatyki Kwantowej, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza  
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 2, 61-614 Poznań, Poland  
fax: +48 61 8257 758; phone: +48 731 742 369  
e-mail: miran@amu.edu.pl; <http://zon8.physd.amu.edu.pl/~miran>

---

Poznań, 11 sierpnia 2022

**Recenzja rozprawy doktorskiej  
mgr. Raya Ganardiego  
pt. „Correlations in mediated dynamics”  
napisanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Tomasza Paterka  
i dr. Adriana Kołodziejskiego**

Przedstawiam niniejszym recenzję rozprawy doktorskiej Pana mgr. Raya Ganardiego (zwanego dalej Kandydatem) pt. „Correlations in mediated dynamics” w postępowaniu w sprawie nadania Kandydatowi stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie nauki fizyczne. Zostałem powołany na recenzenta w tym postępowaniu uchwałą Rady Dyscypliny Nauki Fizyczne Uniwersytetu Gdańskiego na podstawie art. 190 ust. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. z 2022 r. poz. 574 z późn. zm.) na posiedzeniu w dniu 2 czerwca 2022 roku. Oficjalna informacja o tej decyzji została mi przekazana przez Prof. UG dr. hab. Marka Józefowicza, Przewodniczącego Rady Dyscypliny Nauki Fizyczne Uniwersytetu Gdańskiego.

Oceniana przeze mnie rozprawa doktorska została napisana przez Kandydata pod opieką naukową promotora – prof. dr. hab. Tomasza Paterka i promotora pomocniczego – dr. Adriana Kołodziejskiego w Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki na Uniwersytecie Gdańskim.

Najistotniejsze wyniki dysertacji zostały opublikowane w dwóch artykułach. Mianowicie, artykuł pt. „Hierarchy of correlation quantifiers comparable to negativity”, w którym pierwszym autorem jest Kandydat, ukazał się w tym roku w czasopiśmie Quantum (o wskaźniku cytowań 6,8) oraz artykuł pt. „Detecting nondecomposability of time evolution via extreme gain of correlations”, w którym Kandydat jest drugim autorem, został opublikowany w Physical Review A (o wskaźniku cytowań 2,97) w 2018 roku. Kandydat w swojej dysertacji odwołuje

się też do trzeciej pracy pt. „Quantitative nondecomposability of unknown mediated dynamics”, która w dniu złożenia dysertacji nie była jeszcze ukończona. Do dnia, w którym piszę tę recenzję, praca ta nie jest umieszczona w bazie preprintów arXiv.org ani na innych publicznie dostępnych serwerach, więc można wnosić, że w dalszym ciągu ta praca nie została ukończona.

Warto też wspomnieć o trzech innych artykułach Kandydata opublikowanych w prestiżowych czasopiśmie. Mianowicie, artykuł 1. pt. „Entanglement gain in measurements with unknown results” został opublikowany w *Physical Review A* w 2019 roku; praca 2. pt. „Generalised uncertainty relations from superpositions of geometries” ukazała się w *Classical & Quantum Gravity* (o wskaźniku cytowań 3,7) również w 2019 roku oraz artykuł 3. pt. „Cooperation and dependencies in multipartite systems” został opublikowany w *New Journal of Physics* (o wskaźniku cytowań 3,7) w 2021 roku. Wyniki tych trzech prac jednak nie zostały uwzględnione w dysertacji, gdyż tematyka tych prac wykracza poza zakres badań opisanych w dysertacji. Niemniej prace te świadczą o stosunkowo dużej aktywności naukowej Kandydata.

Recenzowana przeze mnie rozprawa pt. „Correlations in mediated dynamics” dotyczy m.in. korelacji kwantowych układów złożonych, których podukłady oddziałują ze sobą wyłącznie przez układy pośredniczące. Autor zbadał związki pomiędzy korelacjami i dynamiką układów pośredniczących w ujęciu kwantowej teorii informacji, w szczególności z wykorzystaniem ogólnej teorii zasobów kwantowych. Zatem użyty w tytule termin „mediated dynamics” oznacza dynamikę układów sprzężonych pośrednio. Jednak należy podkreślić, że rozprawa nie ogranicza się wyłącznie do tematyki określonej w tytule, o czym piszę szczegółowo w dalszej części tej recenzji.

Rozprawa została napisana w języku angielskim z dołączonym krótkim streszczeniem w języku polskim. Praca liczy 63 strony i składa się, oprócz pięciostrońnicowego wprowadzenia, jednostronicowego podsumowania oraz obszernej dziewięciostrońnicowej bibliografii, z trzech głównych rozdziałów (tj. 2, 3 i 4), gdzie Autor opisał najważniejsze wyniki dysertacji.

W rozdziale 2, Autor przedstawił zunifikowany opis różnych typów korelacji i ich miar w kontekście teorii zasobów. Opisane miary korelacji można podzielić, zdaniem Autora, na następujące kategorie: I. Miary kwantowo-informatyczne, takie jak destylacja splątania (ang. entanglement distillation) będąca miarą destylowalnego splątania, czy też koszt splątania (ang. entanglement cost) zainspirowany protokołem teleportacji kwantowej. II. Miary typu convex roof, takie jak np. splątanie tworzenia (ang. entanglement of formation). III. Miary korelacji jako odległości danego stanu od pewnej klasy stanów, np. względna entropia splątania

(ang. relative entropy of formation, REE), która jest zdefiniowana jako uogólniona odległość (tj. kwantowa dywergencja Kullbacka-Leiblera) stanów splątanych od stanów separowalnych. IV. Miary zdefiniowane w oparciu o funkcjonał Minkowskiego, np. odporność separowalności (ang. robustness of separability). Rozdział ten ma charakter przeglądowy, jednak zawiera też nowe nietrywialne lematy i ich dowody dotyczące miar splątania w ujęciu funkcjonałów Minkowskiego.

W rozdziale 3, Autor przedstawił moim zdaniem swoje najciekawsze wyniki dotyczące tzw. ujemności (ang. negativity) i hierarchii korelacji w oparciu o miary odległości.

Kandydat pokazał, że ujemność należy do klasy (czy też podkategorii) miar korelacji skonstruowanych z wykorzystaniem częściowej transpozycji (ang. partial transposition, PT) jako miary odległości. Autor przedstawił operacyjną interpretację tej odległości typu PT dowodząc, że jest górnym ograniczeniem na optymalne prawdopodobieństwo sukcesu w protokołach ukrywania danych za pomocą operacji typu PPT (ang. positive partial transposition), tj. operacji zachowujących dodatniość częściowej transpozycji. Moim zdaniem jest to ciekawe uogólnienie i nietrywialne zastosowanie protokołów ukrywania danych w stanach Bella. Oryginalne protokoły tego typu były zaproponowane 20 lat temu przez Terhal, DiVincenzo i Leunga<sup>1</sup> oraz przez Eggelinga i Wenera.<sup>2</sup> Ponieważ odległość typu PT określa górne ograniczenie na rozróżnialność stanów przy założeniu operacji typu PPT, zatem również wyznacza górne ograniczenie na rozróżnialność stanów, gdy operacje są bardziej ograniczone, np. jedno- i dwukierunkowe operacje typu LOCC, tj. lokalne operacje kwantowe i klasyczna komunikacja, czy też operacje separowalne. Autor wysunął hipotezę, że ujemność w rzeczywistości można zakwalifikować do tej klasy miar korelacji i przedstawił też kilka twierdzeń z dowodami na poparcie tej hipotezy. W oparciu o te wyniki Autor określił hierarchię miar i estymatorów korelacji, które są porównywalne z ujemnością. Kandydat zbadał geometrię korelacji w tej klasie i pokazał, że struktura tych miar korelacji różni się istotnie od dobrze znanej struktury względnej entropii splątania, tj. miary splątania kwantowego wg Vedrala i współpracowników.

Moim zdaniem podanie nowej interpretacji ujemności jest istotnym wkładem Kandydata w rozwój teorii informacji kwantowej. O wadze tych wyników piszę bardziej szczegółowo poniżej.

---

<sup>1</sup>B. M. Terhal, D. P. DiVincenzo, D. W. Leung, „Hiding bits in Bell states”, Phys. Rev. Lett. **86**, 5807 (2001); D. P. DiVincenzo, D. W. Leung, B. M. Terhal, „Quantum data hiding”, IEEE Trans. Inf. Theory, **48**, 580 (2002).

<sup>2</sup>T. Eggeling, R. F. Werner, „Hiding classical data in multipartite quantum states”, Phys. Rev. Lett. **89**, 097905 (2002).

W rozdziale 4, Kandydat opisał korelacje dwóch układów (tzw. próbek) oddziałujących poprzez dodatkowy układ pośredniczący. Zaproponował także metody wykrywania nieklasyczności oddziaływania poprzez badanie kwantowych korelacji próbek przyjmując, że klasyczne oddziaływania są opisywane przez Hamiltoniany komutujące. Autor zastosował ten formalizm do teorii symulatorów kwantowych oraz do ograniczenia możliwych teorii grawitacji w przestrzeni Hilberta. Warto podkreślić, że te ciekawe wyniki badań Autora były zainspirowane pracami pokazującymi możliwość obserwacji nieklasycznych własności oddziaływania grawitacyjnego między masywnymi obiektami. W szczególności Kandydat wymienił dwa artykuły opublikowane w 2017 roku w *Physical Review Letters*, tj. pracę pt. „Spin entanglement witness for quantum gravity” autorstwa Bosego i współpracowników oraz artykuł pt. „Gravitationally induced entanglement between two massive particles is sufficient evidence of quantum effects in gravity” autorstwa Marletto i Vedrala.

Autor nakreślił metodę wykrywania niekomutatywności map, niezależnie od rodzaju oddziaływań. Granica ta w zasadzie zależy tylko od wymiaru układu pośredniczącego, tym samym zaproponowane kryterium może okazać się przydatne w przypadkach, w których sprzężenie nie jest wystarczająco dobrze scharakteryzowane, nawet gdy nie jesteśmy w stanie określić jaki jest Hamiltonian oddziaływania. Jako przykład zastosowań tych ogólnych wyników, Kandydat powiązał stopień korelacji z liczbą kroków Trottera potrzebnych w symulatorze kwantowym stosując transformację Suzukiego-Trottera. Ponadto, jako test przewidywań różnych kwantowych teorii grawitacji, Autor sformułował również kryterium wykrywające, czy mapa może mieć rozkładalną dylatację w przypadku układu pośredniczącego o ograniczonym wymiarze. Kandydat też zdefiniował miary nierozkładalności map i nakreślił sposób szacowania tych miar w powiązaniu z technikami ich detekcji. Moim zdaniem są to ciekawe i nietrywialne wyniki, które pokazują, że fizyczne zasoby i metody informatyki kwantowej są przydatne do weryfikowania poprawności innych teorii fizycznych, w szczególności do testowania kwantowych teorii grawitacji.

Omówię teraz w szerszym kontekście jeden z najciekawszych wyników tej dysertacji.

W rozprawie przedstawiono nowatorską (według mojej wiedzy) i interesującą interpretację miary splątania kwantowego zwanej ujemnością, jako miary pewnej odległości. Pozwolę sobie podkreślić że ujemność, która jest zdefiniowana jako stopień łamania kryterium seperowalności Peresa-Horodeckich, jest prawdopodobnie najbardziej popularną miarą splątania kwantowego z uwagi na prostotę jej obliczenia. Miara ta ma też rozmaite interpretacje fizyczne. Wiadomo

np., że: 1) ujemność określa górną granicę destylacji splątania<sup>3</sup>; 2) ujemność jest też miarą kosztu PPT splątania (ang. PPT entanglement cost), tj. kosztu splątania przy wykorzystaniu wyłącznie operacji zachowujących dodatniość częściowej transpozycji dla układów dwukubitowych zgodnie z twierdzeniem Audenaerta i współpracowników<sup>4</sup>, które zostało udowodnione przez Ishizakę<sup>5</sup> oraz, że 3) ujemność określa też wymiarowość splątania, tzn. liczbę stopni swobody splątanych podsystemów wg twierdzenia Eltschki i Siewerta<sup>6</sup>.

Bardzo podoba mi się koncepcja odległości częściowo transponowanej, wprowadzona we wspomnianym artykule Kandydata opublikowanym w *Quantum*, która uzasadnia ważną interpretację geometryczną ujemności. Kandydat pokazał, że ta interpretacja ujemności jest słuszna dla dużej klasy stanów i sformułował hipotezę, że tak też jest dla wszystkich dwudzielnych destylowalnych stanów splątanych. Uważam, że jest to rzeczywiście fundamentalne i nowatorskie podejście do ujemności jako miary splątania. Bardzo cenię ten wynik, chociaż, jak już wspomniałem, nie został jeszcze udowodniony dla dowolnych stanów splątanych destylowalnych.

Warto podkreślić, że w kwantowej teorii informacji często hipoteza sformułowana w jednej pracy jest dopiero później w pełni udowodniona przez innych badaczy, co można stwierdzić analizując, np. słynną listę pt. „Some Open Problems in Quantum Information Theory” [arXiv:quant-ph/0504166] opracowaną pod redakcją Kruegera i Wernera. Lista ta zawiera m.in. problem z r. 2003 dotyczący udowodnienia hipotezy Audenaerta i współpracowników nt. interpretacji ujemności jako kosztu PPT splątania dla dwóch kubitów. Hipoteza ta została udowodniona rok później przez Ishizakę, o czym napisałem powyżej.

Chciałbym też zaznaczyć, że znane interpretacje ujemności mają istotne ograniczenia, dlatego wynik Kandydata dotyczący tej miary korelacji jest, moim zdaniem, wyjątkowo wartościowy. Mianowicie, wspomniana powyżej interpretacja 1) dotyczy tylko górnego ograniczenia destylacji splątania, a nie jest de facto miarą tego typu splątania. Interpretacja 2) ujemności jako kosztu PPT splątania dotyczy wyłącznie splątania dwóch kubitów. W przypadku splątania dwóch ku-

---

<sup>3</sup>R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, „Quantum entanglement”, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).

<sup>4</sup>K. Audenaert, M. B. Plenio, and J. Eisert, „Entanglement Cost under Positive-Partial-Transpose-Preserving Operations”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 027901 (2003).

<sup>5</sup>S. Ishizaka, „Binegativity and geometry of entangled states in two qubits”, *Phys. Rev. A* **69**, 020301(R) (2004).

<sup>6</sup>C. Eltschka, J. Siewert, „Negativity as an Estimator of Entanglement Dimension”, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 100503 (2013).

ditów, ten koszt nie jest opisany ujemnością, ale miarami Wanga-Wilde'a, tzw. splątaniem typu  $\kappa$  (ang.  $\kappa$ -entanglement) i ujemnością  $\alpha$ -logarytmiczną (ang.  $\alpha$ -logarithmic negativity).<sup>7</sup> Odnośnie do interpretacji 3) wspomnę, że ujemność jest estymatorem raczej niż porządną miarą wymiarowości splątania. Tak więc, moim zdaniem, interpretacja ujemności jako odległości wg propozycji Kandydata może okazać się najważniejszą jej własnością spośród wymienionych, jeśli tylko uda się ją udowodnić dla dowolnych dwudzielnych stanów splątanych destylowalnych.

Ogólnie dysertacja jest bardzo dobrze napisana i ma logiczną strukturę, choć mam kilka drobnych uwag krytycznych. Myślę, że tytuł rozprawy „Correlations in mediated dynamics” nie jest adekwatny do jej treści, gdyż dotyczy wyników tylko jednego i nienajważniejszego rozdziału rozprawy, tj. rozdziału 4. Moim zdaniem zdecydowanie najważniejszym wynikiem rozprawy jest zaproponowanie nowej ważnej interpretacji ujemności w rozdziale 3. Warto podkreślić, że: 1) ta interpretacja dotyczy splątania dwóch układów niezależnie od ich dynamiki i rodzaju oddziaływań. Mogą to być oddziaływania zarówno bezpośrednie jak i za pośrednictwem innych układów. 2) Spośród wszystkich prac Kandydata, wyniki te zostały opublikowane w najwyższym punktowanym czasopiśmie. 3) Jest to też jedyny artykuł Kandydata, w którym jest pierwszym autorem. Reasumując tytuł „Correlations in mediated dynamics” mógłby być świetnym tytułem rozdziału 4, ale nie obejmuje tematyki i wyników całej dysertacji.

Mam też kilka uwag co do rozdziału 2 nt. miar splątania i ich podziału na 4 kategorie. Szkoda, że Autor nie podkreślił, że wiele miar splątania stosowanych powszechnie w literaturze można równocześnie przypisać do kilku z wymienionych przez Kandydata kategorii, np. względna entropia splątania jest nie tylko miarą korelacji typu odległości (o czym Autor wspomniał), ale też miarą typu convex roof (o czym Autor nie wspomniał). A ujemność prawdopodobnie daje się przypisać nawet do trzech kategorii biorąc pod uwagę różne interpretacje tej miary, w tym tę nową interpretację zademonstrowaną w dysertacji.

Podkreślę jedynie, że są to drobne uwagi krytyczne, które nie wpływają na moją zdecydowanie pozytywną ocenę całej rozprawy.

Jestem przekonany, że badacze, którzy są zainteresowani miarami splątania kwantowego (w szczególności ich hierarchiami) również uznają tę dysertację za interesującą, a jej najważniejsze wyniki mogą okazać się przydatne w ich dalszych badaniach.

W podsumowaniu chciałbym podkreślić, że cele rozprawy doktorskiej zostały

---

<sup>7</sup>X. Wang, M. M. Wilde, „Cost of quantum entanglement simplified”, Phys. Rev. Lett. **125**, 040502 (2020); „ $\alpha$ -logarithmic negativity”, Phys. Rev. A **102**, 032416 (2020).

wyraźnie określone w jej streszczeniu i konsekwentnie zrealizowane. Rozwiązany został interesujący i aktualny problem badawczy, a osiągnięte wyniki reprezentują światowy poziom naukowy.

Recenzowana rozprawa i wymienione publikacje jednoznacznie świadczą o tym, że Kandydat jest dojrzałym naukowcem umiejącym posługiwać się zaawansowanymi metodami analitycznymi informatyki kwantowej. Przedstawiona praca doktorska jest nowatorskim spojrzeniem na zagadnienia miar splątania kwantowego. Moim zdaniem jest to wartościowa i stojąca na wysokim poziomie naukowym praca badawcza wnosząca nowe interesujące wyniki o charakterze fundamentalnym.

Reasumując stwierdzam, że przedstawiona mi do recenzji rozprawa doktorska spełnia, w mojej opinii, wszelkie wymogi stawiane ustawą z dnia 20 lipca 2018 r. - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. 2018 poz. 1668). Tym samym stwierdzam, że rozprawa ta stanowi oryginalne rozwiązanie przez jej Autora problemu naukowego z dziedziny teorii korelacji kwantowych, a także świadczy o ogólnej wiedzy Kandydata w zakresie nowoczesnych metod informatyki kwantowej oraz świadczy o Jego umiejętności prowadzenia badań na wysokim poziomie naukowym.

Dlatego też wnoszę o dopuszczenie Pana mgr. Raya Ganardiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Adam Miranowicz