

Streszczenie

Stopień współmienniczy \deg_G jest narzędziem służącym do wykrywania zer lokalnych odwzorowań współmienniczych. Idea jego działania jest analogiczna do stopnia Brouwera: jeżeli wartość stopnia jest różna od zera, dane odwzorowanie posiada miejsca zerowe. Choć proces wyznaczania wartości stopnia współmienniczego bywa skomplikowany, posiada on bogatszą strukturę niż klasyczny stopień. Wartości \deg_G nie są liczbami, lecz elementami pierścienia Burnside'a, składającymi się z kilku współczynników. W wielu przypadkach ten stopień jest skuteczniejszy niż stopień Brouwera, przyjmując niezerową wartość tam, gdzie ten drugi jest równy zero. Co więcej, analiza niezerowych współczynników \deg_G pozwala na wyciągnięcie wniosków na temat konkretnych typów orbitowych występujących w zbiorze miejsc zerowych. Dla jeszcze węższej klasy odwzorowań współmienniczych, które są jednocześnie gradientowe, rozwinęła się teoria współmienniczego stopnia gradientowego \deg_G^∇ o wartościach w pierścieniu Eulera-tom Diecka i jeszcze bogatszej strukturze. Oba te stopnie na przestrzeni kilkudziesięciu ostatnich lat doczekały się licznych zastosowań oraz uogólnień.

Celem pracy jest rozwinięcie dwóch wybranych aspektów teorii tych stopni. Pierwszym z nich jest kwestia własności produktowej stopnia \deg_G . Własność ta została wykazana w ogólnym przypadku zwartej grupy Liego przez Kazimierza Gębę, Wiesława Krawcewicza i Jianhonga Wu w artykule z 1994 roku, jednak przedstawiony tam dowód miał charakter skrótowy i formalny. Przedstawiamy nowy, pełny dowód wzoru produktowego przy założeniu, że G jest grupą skończoną lub zwartą abelową grupą Liego. Drugi aspekt, któremu poświęcona jest praca, to wprowadzenie nowej wersji gradientowego stopnia współmienniczego w przestrzeni Hilberta. Motywacją do jego opracowania były potencjalne zastosowania m.in. przy wykrywaniu okresowych rozwiązań układów hamiltonowskich.

Rozdział 1 poświęcony jest preliminariom. Zawiera podstawowe definicje dotyczące odwzorowań współmienniczych, stopnia \deg_G oraz elementy teorii wiązek wektorowych, które zostaną wykorzystane w kolejnych rozdziałach dotyczących wzoru pro-

duktowego. W Rozdziale 2 przedstawiamy dowód tego wzoru dla stopnia \deg_G w przypadku, gdy G jest grupą skończoną. Opiera się on na nowym pojęciu odwzorowań polistandardowych oraz na twierdzeniu typu Hopfa dla lokalnych odwzorowań współzmienniczych wykazanym przez P. Bartłomiejczyka w artykule z 2017 roku. W następnym rozdziale dowodzimy własności produktowej przy działaniu zwartej abelowej grupy Liego, stosując podobne rozumowanie z uwzględnieniem niezbędnych modyfikacji.

Kolejne dwa rozdziały dotyczą nowej nieskończonej wymiarowej wersji stopnia. Mianowicie, prezentujemy konstrukcję stopnia w przestrzeni Hilberta dla współzmienniczych, gradientowych, zwartych zaburzeń współzmienniczego, nieograniczonego, samosprężonego operatora o czysto dyskretnym widmie. Wspomniany niezmiennik, oznaczany Deg_G^∇ , przyjmuje wartości w pierścieniu Eulera-tom Diecka. W Rozdziale 4 przedstawiamy definicję tego stopnia opartą na skończonej wymiarowej aproksymacji, a następnie pokazujemy, że Deg_G^∇ spełnia warunki wymagane od niezmienników nazywanych stopniami (addytywność, otopijna niezmienniczość, wykrywanie zer, normalizacja i własność produktowa). Rozdział 5 rozpoczyna się od omówienia problemu poszukiwania orbit okresowych układów hamiltonowskich wraz z rysem historycznym i opisem dotychczasowych wyników z tej dziedziny. W dalszej części rozdziału wyjaśniamy, jak sprowadzić ten problem z równań różniczkowych zwyczajnych do zagadnienia wyznaczania zer pewnego operatora nieliniowego w przestrzeni Hilberta. Tego typu zamiana pozwala na stosowanie naszego współzmienniczego stopnia gradientowego Deg_G^∇ .

W ostatnim rozdziale proponujemy kilka hipotez naturalnie wynikających z wcześniej omówionych rezultatów. Wyznaczają one możliwe ścieżki dalszych badań nad zagadnieniami prezentowanymi w tej pracy.