Dr hab. Grzegorz Gabor, prof. UMK
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, dnia 5.09.2022 r.

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Bartosza Kamedulskiego pt. *Wybrane własności i zastosowania stopnia odwzorowań współzmienniczych***

Rozprawa doktorska mgr. Bartosza Kamedulskiego dotyczy znanych zagadnień w teorii współzmienniczego stopnia topologicznego i, jak można się domyśleć z lektury tekstu, postawionym zadaniem badawczym nie było uzyskanie nowych własności lub rozszerzenie ich działania na nowe klasy współzmienniczych odwzorowań, ale przedstawienie dość prostego, elementarnego podejścia do stopnia. Zaproponowane techniki nie dały się użyć w ogólnej sytuacji znanej w literaturze, dlatego uzyskane wyniki mogą mieć jedynie ograniczone zastosowanie. Ocenę wyników i ich możliwego znaczenia podam w dalszej części recenzji.

Rozprawa liczy 80 stron, gdzie początkowe 10 stron to strona tytułowa, podziękowania, streszczenia i spis treści, a ostatnie 7 to długi spis literatury. Po Wstępie zawierającym rys historyczny i opis wyników oraz Preliminariach (Rozdział 1) zawierających podstawowe wiadomości dotyczące stopnia odwzorowań współzmienniczych i klas otopii następują główne rozdziały merytoryczne 2-5. Rozważania kończy krótki rozdział nazwany Hipotezy.

Badania mgr. Kamedulskiego skupiają się na dwóch różnych zagadnieniach, opisanych osobno w rozdziałach 2-3 oraz 4-5, dlatego dalszą analizę wyników rozdzielę również na dwie części. Pragnę jeszcze w tym miejscu wspomnieć, że wyniki przedstawione w rozprawie zostały już opublikowane w pracach [9,10,52], z czego dwie pierwsze są współautorskie (z promotorem P. Bartłomiejczykiem i P. Nowakiem-Przygodzkim) a trzecia jest samodzielna.

Pierwszy problem przedstawiony i badany przez mgr. Kamedulskiego to wzór produktowy stopnia $\deg_G(f)$ współzmienniczych odwzorowań lokalnych działających między skończenie wymiarowymi reprezentacjami ortogonalnymi grupy $G$:

$$\deg_G(f \times \tilde{f}) = \deg_G(f) \cdot \deg_G(\tilde{f}),$$

gdzie $f$ i $\tilde{f}$ są współzmienniczymi odwzorowaniami lokalnymi ($f^{-1}(0)$ jest zwarty w dziedzinie) działającymi na otwartych podzbiorach $G$-reprezentacji $V$ i $W$, odpowiednio, a „$\cdot$" jest znakiem mnożenia w pierścieniu Burnside'a $\mathscr{A}(G)$.

Jak przyznaje sam Autor rozprawy (i autorzy pracy [9]), wzór jest znany i w ogólnej sytuacji zwartej grupy Liego $G$ został przedstawiony przez K. Gębę, W. Krawcewicza i J. Wu w pracy [38] w roku 1994. Nie używa się tam pojęcia odwzorowania lokalnego i otopii oraz, rzeczywiście, jego uzasadnienie ma tam charakter

„szkicowy", ale wzór jest oczywiście prawdziwy i można znaleźć inne jego uzasadnienia. Chociażby można by wykorzystać wzajemną jednoznaczność pomiędzy elementami przestrzeni $\left[S^V, S^V\right]_G$ klas $G$-homotopii odwzorowań współzmienniczych sfery $S^V$ (w $V$) w siebie i elementami przestrzeni $\mathscr{C}_G[V]$ (ozn. z rozprawy) klas współzmienniczych otopii właściwych odwzorowań lokalnych, a już dla odwzorowań sfer wzór znajduje się w wielu klasycznych pracach na ten temat. Jest to jednak droga poprzez zaawansowaną topologię algebraiczną. Przypuszczam, że Autorowi (autorom pracy [9]) chodziło o podanie bardziej „analitycznej" i elementarnej techniki wyznaczenia stopnia, nawiązującej do zaproponowanej przez Gębę, Krawcewicza i Wu. W tym celu Autor (autorzy) wprowadza klasy odwzorowań standardowych i polistandardowych, które okazują się „generyczne" w badanym problemie. Dla takich odwzorowań można dość łatwo wyznaczyć wzór stopnia topologicznego, widoczny na str. 30 i 31 rozprawy (dla grupy skończonej) oraz w Stwierdzeniu 3.10 (dla zwartej grupy abelowej), i wykazać wzór produktowy, przeprowadzając rozumowanie zawarte w Lemacie 2.3 (dla grupy skończonej) lub Lemacie 3.11 (dla zwartej grupy abelowej Liego). Według mnie, najistotniejszym elementem usprawiedliwiającym rozważania dla odwzorowań polistandardowych jest fakt, że w każdej klasie otopii w $\mathscr{C}_G[V]$ można znaleźć odwzorowanie polistandardowe. Dowód tego faktu, znajdujący się w Lemacie 2.4 (dla grupy skończonej) i Lemacie 3.13 (dla zwartej grupy abelowej Liego) bazuje na kluczowym Wniosku 2.7 (por. również Tw. 1.6) dotyczącym lokalnych przekrojów wiązki wektorowej.

W tym miejscu pozwolę sobie na mały komentarz dotyczący porównania wyników rozdziałów 2 i 3. Odnoszę wrażenie, że różnica jest znikoma i całość można by skrócić do kilku linijek. Definicja odwzorowania standardowego nieznacznie się w tych rozdziałach różni, gdyż w przypadku grupy skończonej orbity z natury składają się ze skończenie wielu elementów, a w przypadku zwartej abelowej grupy Liego tak nie musi być i formalnie założenie o skończoności orbity $\alpha = f^{-1}(0)$ musi być dodane do definicji. Ale dla tych podgrup $H$ grupy $G$, dla których $[G/H]$ jest generatorem w $\mathscr{A}(G)$, orbity także są skończonymi zbiorami i w zasadzie wszystkie dalsze rozważania są identyczne. Rozdział 3 muszę więc ocenić nisko, choć oczywiście wytłumaczenie w kilku zdaniach, jak wyniki i rozumowanie z rozdziału 2 przenoszą się na przypadek zwartej abelowej grupy Liego powinno się w rozprawie znaleźć.

Kończąc omówienie tej części rozprawy, stwierdzam, że nowością jest wprowadzenie łatwych do badania klas odwzorowań standardowych, polistandardowych i ściśle polistandardowych, będących podklasami klasy lokalnych odwzorowań współzmienniczych, a jednocześnie klasami generycznymi w tym sensie, że wyznaczają one te same przestrzenie otopii. Chociaż wyniki rozdziałów 2-3 nie wykraczają poza znany stan wiedzy, zauważenie możliwości wykorzystania tych prostych odwzorowań w badaniu własności stopnia topologicznego jest ciekawą obserwacją.

Główny rozdział drugiej części rozprawy to rozdział 4 zatytułowany „Nowy wariant stopnia współzmienniczego w przestrzeni Hliberta". Już sam tytuł nasuwa czytelnikowi, czego powinien się spodziewać w takim rozdziale. Po pierwsze, pojawi się jakaś nowa konstrukcja stopnia topologicznego dla pewnej klasy odwzorowań współzmienniczych, a potem pojawi się jakieś uzasadnienie, że ta wersja jest „nowa", czyli jakoś różni się (dla tej rozpatrywanej klasy odwzorowań) od dotychczasowych lub że jest to ten sam stopień, ale w konkretnych sytuacjach daje się łatwiej policzyć lub ma jakąś inną, nową, istotną cechę. Niestety, nie znalazłem w rozprawie (oraz w pracy [10]) takiego porównania. Przez to trudno się doszukać istotnej wartości aplikacyjnej. Jedyny przedstawiony (w rozprawie) przykład sytuacji, gdzie można by zastosować wprowadzoną wersję stopnia to układy hamiltonowskie typu $\dot{z} = \mathscr{J}\nabla H(z)$, z którymi matematycy radzą sobie inaczej. Problemem w badaniu układów hamiltonowskich metodami topologicznymi jest m.in. to, jak policzyć stopień współzmienniczy, lub inaczej, jakie warunki dostateczne gwarantują jego nietrywialność. Twierdzenie 5.24 rozprawy jest więc prawdziwe, ale mało wnoszące. Przydałby się jakiś przykład, w którym znanymi metodami nie można lub trudno jest stwierdzić niezerowość stopnia (lub np. istnienie rozwiązań jakiegoś problemu różniczkowego), a „nowa wersja" stopnia to rozstrzygnięcie umożliwia lub upraszcza.

Po tym dość krytycznym wstępie chcę krótko przedstawić istotę wprowadzonej wersji stopnia topologicznego dla współzmienniczych odwzorowań będących gradientowymi zaburzeniami nieograniczonych operatorów samosprzężonych z czysto dyskretnym spektrum w przestrzeni Hilberta. Autor rozprawy rozpoczyna czwarty rozdział od przypomnienia informacji m.in. o nieograniczonych operatorach samosprzężonych w przestrzeniach Hilberta, gradiencie w takich przestrzeniach i pierścieniu Eulera-tom Diecka. Podana jest również podstawowa dla dalszych rozważań definicja odwzorowania lokalnego. Ma być ono postaci $f(x) = Ax - \nabla\varphi(x)$, gdzie $\varphi : E \to \mathbb{R}$ jest niezmienniczym ($\varphi(gx) = \varphi(x)$) odwzorowaniem klasy $C^1$, $E$ jest przestrzenią Hilberta będącą rzeczywistą, ortogonalną reprezentacją zwartej grupy Liego $G$ i $A : D(A) \subset E \to E$ jest współzmienniczym, nieograniczonym operatorem samosprzężonym z czysto dyskretnym widmem. Celowo nie napisałem dziedziny odwzorowania $f$, gdyż ma ona tu kluczowe znaczenie i chcę jej poświęcić trochę uwagi. Otóż Autor zakłada, że dziedzina $D_f$ odwzorowania lokalnego $f$ jest otwartym, niezmienniczym podzbiorem przestrzeni $E_1 = D(A)$ rozpatrywanej z iloczynem skalarnym $\langle x\|y\rangle_1 = \langle x\|y\rangle + \langle Ax\|Ay\rangle$, która z tak określonym iloczynem staje się przestrzenią Hilberta. Ponadto, operator $A$ rozpatrywany z dziedziną $E_1$ staje się ograniczony, a dzięki założeniu o dyskretności widma, zanurzenie $\imath : E_1 \hookrightarrow E$ jest zwarte. Stąd natychmiast gradient $E_1 \ni x \mapsto \nabla\varphi(x)$ staje się odwzorowaniem zwartym. Dzięki temu sytuacja przedstawiona w rozprawie odpowiada tej rozpatrywanej przez A. Gołębiewską i S. Rybickiego w pracy [43] z 2011 roku. We wspomnianej pracy nie zakłada się dyskretności spektrum, która generuje konkretny schemat aproksymacyjny utworzony przez podprzestrzenie własne, ale ogólnie zakłada się istnienie $G$-współzmienniczego schematu aproksymacyjnego i pokazuje się niezależność stopnia od wyboru takiego schematu. Prawdę mówiąc, trudno mi dostrzec nowatorstwo podejścia zaprezentowanego w rozprawie w stosunku do tego z pracy [43]. Zarówno tu jak i w pracy [43] wykorzystuje się fakt, że współzmienniczy stopień $\deg_G^\nabla(A_n)$, gdzie $A_n$ jest obcięciem operatora $A$ do kolejnej podprzestrzeni w schemacie aproksymacyjnym, jest elementem odwracalnym w pierścieniu Eulera-tom Diecka. Dzięki temu stopień $\deg_G^\nabla(f_n)$ obcięć $f_n := A - P_n\nabla\varphi$ przemnożony przez odpowiedni element pierścienia (w rozprawie oznaczony przez $m_n$, a w [43] przez $\nabla_G - \deg(A, B(\mathbb{H}^n \ominus \mathbb{H}^0))^{-1}$) stabilizuje się dla dużych $n \geq 1$. Na co dzień nie zajmuję się teorią odwzorowań współzmienniczych i być może umyka mi jakiś ważny niuans, ale jeśli są różnice w obu podejściach, powinny być przez Autora (i autorów pracy [10]) wyraźnie pokazane. Może właśnie wtedy widać byłoby oryginalność osiągnięcia naukowego, wymaganą w rozprawach doktorskich (por. art. 187 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym). W obecnej postaci ta część rozprawy prezentuje elegancki, prosty schemat konstrukcji współzmienniczego stopnia topologicznego w przestrzeni Hilberta, ale elegancja, według mnie, wynika z dość silnych założeń (ustalony schemat aproksymacyjny poprzez przestrzenie własne).

Muszę jeszcze wspomnieć o rozdziale piątym, do którego nawiązywałem już wcześniej. Przedstawia on prawidłowe przeliczenia pokazujące, że układy hamiltonowskie spełniają wszystkie założenia potrzebne do stosowalności wprowadzonej w rozdziale 4 wersji stopnia topologicznego. Nie jest to zaskakujące, a wręcz naturalne. Można powiedzieć, że całe szczęście, że ta klasa problemów pasuje do abstrakcyjnych wyników z poprzedniego rozdziału. Tak jak wspomniałem wcześniej, wartości temu rozdziałowi dodałyby przykłady pokazujące wyższość przedstawionego podejścia nad znanymi w literaturze.

Zanim przejdę do konkluzji, podam kilka szczegółowych uwag dotyczących niektórych fragmentów rozprawy:

1. Na str. 19 mylnie w jednym miejscu pojawił się symbol stopnia odwzorowań gradientowych.

2. Nie ujednolicone są oznaczenia przecięć przekrojów. Czasami pojawia się $\Theta_i$, a czasami $\theta_i$.

3. W podrozdziale 1.1.6 pojawia się definicja pierścienia Burnside'a dla zwartej grupy Liego, a w podrozdziale 2.1 pierścienia Burnside'a dla grupy skończonej. Aż się prosi, by na końcu podrozdziału 2.1 pojawiło się zdanie komentarza, jak się ma ta druga definicja (poprzez półpierścień Grothendiecka) do pierwszej.

4. Mam duży niedosyt w stosunku do sposobu wprowadzenia klasy odwzorowań standardowych i polistandardowych. Autor jedynie wspomina, że pojęcie to nawiązuje do wykorzystywanego przez innych matematyków pojęcia odwzorowania *normalnego* (tu Autor cytuje [7,8,25,38]), ale nie ma

w rozprawie żadnych przykładów odwzorowań standardowych (a przecież wprowadza się nowe pojęcie) i żadnego, choć skromnego, porównania klasy tych odwzorowań z klasą odwzorowań normalnych. Może to jednak moje subiektywne przyzwyczajenie...

5. W pierwszym zdaniu podrozdziału 3.5.2 powinno być oczywiście $\dim V_G \neq 0$.

6. Dowód Lematu 4.7 jest potraktowany, według mnie, zbyt lakonicznie. Sytuacje, gdy operator $A$ nie jest identycznością (jak przy stopniu Leray-Schaudera) wymagają ostrożności i przynajmniej wskazania właściwych argumentów. Moim zdaniem, rozprawa doktorska powinna zawierać trochę więcej wyjaśnień niż publikacja w czasopiśmie, gdzie pomija się niektóre szczegóły.

7. W dowodzie Lematu 4.8 Autor, znowu bardzo lakonicznie, mówi, że wartości $F$ są bliskie wartościom $P_nF$. Jednak po wprowadzeniu schematu aproksymacyjnego na poprzedniej stronie nigdzie nie pojawił się komentarz, że $P_n u \xrightarrow{n\to\infty} u$ (w przypadku ogólnego podejścia w pracy [43] zakłada się, że schemat aproksymacyjny ma mieć tę własność). Myślę, że rozprawa doktorska powinna zawierać takie komentarze.

8. W dowodzie Lematu 4.11 pojawia się bez wyjaśnienia symbol $W_{n+1}$. Kawałek dalej (początek strony 51) znajdujemy zdanie: „Można pokazać, że $h_{n+1}(t,x) \neq 0$ dla $t \in I$ oraz $x \in \partial W_{n+1}$". Myślę, że akurat ten ważny fragment dowodu mógłby pokazać sam Autor.

9. Byłoby lepiej podać jakieś cytowanie przy sformułowaniu Stwierdzenia 5.11.

10. W dowodzie Twierdzenia 5.15 (część dotycząca nieograniczoności) pojawiło się wyliczenie $Af_k = -k\cos(kt) \cdot e_{2n}$. Czy rzeczywiście powinno być $e_{2n}$?

11. Można by podać cytowanie dla okresowej wersji twierdzenia Rellicha-Kondraszowa (str. 62).

12. w spisie literatury wkradło się nieoczekiwane zaburzenie kolejności alfabetycznej. Pozycja [42] powinna znaleźć się trochę dalej, a [80] trochę bliżej.

Przejdę do konkluzji recenzji. **Biorąc pod uwagę wymagania obecnie obowiązującej ustawy „Prawo o szkolnictwie wyższym", kładące nacisk na poziom wiedzy kandydata, umiejętność samodzielnej pracy naukowej oraz oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, uważam, co następuje:**

**- Jako oryginalne uznałbym wprowadzenie prostej klasy odwzorowań polistandardowych, ułatwiających badanie stopnia topologicznego**

odwzorowań współzmienniczych, a jednocześnie pozostających generycznymi w klasie wszystkich współzmienniczych odwzorowań lokalnych. Niestety, wprowadzona klasa odwzorowań ma w rozprawie zastosowanie jedynie do podania elementarnego dowodu własności produktowej stopnia, znanej z literatury, co trochę ochładza spojrzenie na ten nowy obiekt. Wyniki dotyczące zwartej, abelowej grupy Liego, opublikowane w samodzielnej pracy mgr. Kamedulskiego [52] można, według mnie, uznać za prostą analogię tych z rozdziału 3 (opublikowanych w pracy wspólnej [9]), co utrudnia pozytywną ocenę samodzielności oryginalnych badań Autora. Pierwszą część rozprawy oceniam więc umiarkowanie pozytywnie.

- Część poświęcona stopniowi topologicznemu dla współzmienniczych odwzorowań z zaburzeniem gradientowym w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta nie zawiera, według mnie, elementów oryginalnych i nowatorskich, mających istotny wpływ na rozwój nauki w tej dziedzinie. Miejscami napisana jest zbyt lakonicznie. Pokazuje jednak, że Autor umiejętnie posługuje się wprowadzonymi lub wcześniej znanymi narzędziami analizy i topologii (choć można się tu mylić, gdyż ta część również przedstawia wyłącznie wyniki współautorskie, tym razem z pracy [10]).

- Możliwe, że mała wartość wyników jest spowodowana mało ambitnym tematem badawczym, a nie słabymi umiejętnościami pracy badawczej Autora. Bogaty spis literatury sugeruje bowiem dość dobrą znajomość tematyki (choć powierzchowną – bez głębszego, krytycznego spojrzenia na swoje osiągnięcia).

Dlatego, choć jestem na podstawie dostępnych danych zmuszony dość nisko ocenić napisaną rozprawę, wnioskuję o dopuszczenie mgr. Bartosza Kamedulskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Grzegorz Gabor

Grzegorz Gabor