UNIWERSYTET WARSZAWSKI
UW MIM
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
prof. dr hab. Piotr Bogusław Mucha

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Karoliny Lademann pt: "Metody aproksymacji numerycznej
liniowego równania Kleina-Gordona z masą czasowo- i przestrzenno- zależną"

Rozprawa doktorska mgr Karoliny Lademann, wykonana pod kierunkiem prof. Karoliny Kropielnickiej, pod tytułem "Metody aproksymacji numerycznej liniowego równania Kleina-Gordona z masą czasowo- i przestrzenno- zależną", koncentruje się na analizie metod aproksymacji numerycznej dla funkcji masy opisanej przez jawną zależność od oscylacji w czasie. Rozprawa doktorska przedstawia trzy podejścia dla zagadnień przybliżania rozwiązań równań. Dokładnej: badane jest równanie Kleina-Gordona w następującej postaci w przypadku wielowymiarowym:

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi = \Delta\phi + f(x,t)\phi, \qquad (KG)$$

gdzie

$$f(x.t) = \alpha(x,t) + \sum_{|n|\leq N} a_n(x,t)e^{i\omega_n t}. \qquad (F)$$

Wyróżniamy $\omega_{min} = \min_n \omega_n$ oraz $\omega_{max} = \max_n \omega_n$. Innymi słowy, celem rozprawy jest analiza skuteczności schematów numerycznych w zależności od struktury f opisanej parametrami ω_{min} oraz $\omega_{\max}$.

Rozprawa wykorzystuje trzy artykuły naukowe jako podstawę badań, w których pani Karolina Kropielnicka oraz pani Karolina Lademann były współautorkami wraz z innymi badaczami, w tym z uczestnictwem współpracowników zagranicznych. Są to:

1. Condon, Marissa; Kropielnicka, Karolina; Lademann, Karolina; Perczyński, Rafał: Asymptotic numerical solver for the linear Klein-Gordon equation with space- and time-dependent mass. Appl. Math. Lett.115 (2021), Paper No. 106935, 7 pp.

2. Karolina Kropielnicka, Karolina Lademann:Third order, uniform in low to high oscillatory coefficients, exponential integrators for Klein-Gordon equations arXiv:2212.13762 (2022).

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
tel.:+48 22 55 44 161
e-mail: p.mucha@mimuw.edu.pl

3. Karolina Kropielnicka, Karolina Lademann, Katharina Schratz, Effective highly accurate time integrators for linear Klein-Gordon equations across the scales; arXiv:2112.08908 (2023).

Główne tematy rozprawy zawierają się w pięciu rozdziałach: Wstępie, trzech rozdziałach powiązanych z kolejnymi pracami naukowymi, które zostały wymienione powyżej, oraz Podsumowaniu. Rozprawa prezentuje obszerne wyniki badań, składające się na ponad 50 stron tekstu. Jest to wynikiem wyboru formatu rozprawy, użytej czcionki i standardowego formatowania wykresów stosowanych w publikacjach naukowych. Z mojego punktu widzenie integralną częścią doktoratu też są kody numeryczne udostępnione na stronie internetowej przez doktorantkę:

https://mostwiedzy.pl/pl/karolina- lademann,1385645-1.

Przejdźmy do omówienia poszczególnych wyników matematycznych: W wynikach naukowych, przedstawionych w rozdziale drugim, opartym na pracy [1], zestawiane są wyniki symulacji numerycznych wykorzystujących różne metody rozwiązywania równań dla funkcji masy o szczególnym kształcie (2.1). Równanie (KG) jest zapisane w postaci (2.2) i rozwijane w szereg potęg ujemnych ω oraz funkcji oscylacyjnych $e^{in\omega t}$. W rezultacie otrzymuje się układ nieskończenie wielu równań, który jest przedstawiony w tabeli 2.1 na stronie 6. Rozdział 2.2 skupia się na analizie przykładów, w których rozwiązanie jest oparte na eksploracji metody Duhamela, traktującej równanie z punktu widzenia półgrup. Kluczowym wyzwaniem w tym podejściu jest obliczenie operatora półgrupy e^{Ah}, co wymaga aproksymacji wyrażenia $e^{Ah} = e^{Bh+Ch}$ z powodu braku komutacji macierzy B i C. W rozprawie zaproponowano trzy podejścia do tego zagadnienia: aproksymacje rzędu pierwszego $e^{Ah} \sim e^{Bh}e^{Ch}$ (Lie-Trotter), rzędu drugiego $e^{Ah} \sim e^{Ch/2}e^{Bh}e^{Ch/2}$ (Strang) oraz rzędu 3 $e^{Ah} \sim e^{Ch}e^{-Bh/24}e^{-2Ch/3}e^{3Bh/4}e^{2Bh/3}e^{7Ch/24}$ (błędne wyrażenie), powinno być $e^{Ah} \sim e^{Ch}e^{-Bh/24}e^{-2Ch/3}e^{3Bh/4}e^{2Ch/3}e^{7Bh/24}$ (po konsultacjach z Doktorantką). Wyniki jakościowe wskazują, że zaproponowane metody są bardziej wydajne od ogólnych metod dla funkcji f charakteryzujących się dużymi oscylacjami.

Kolejny rozdział oparty na pracy [2] skupia się na analizie przypadków, w których funkcja masy może składać się z części oscylacyjnej i części wysoko oscylacyjnej. Głównym wynikiem tej analizy jest wykazanie, że zastosowane metody zapewniają globalny rząd zbieżności h^3, niezależny od wzrostu największej częstości oscylacji ω_{max}. Metoda ta opiera się na podejściu Filona i korzysta z aproksymacji wielomianowej. Dowód zbieżności jest stosunkowo elementarny, opiera się na pewnych trikach, a także odwołuje się do prac innych badaczy. Warto zauważyć, że opis analizy błędów w pracy jest nieco nieprecyzyjny, szczególnie brak zdefiniowania normy w przestrzeni (wykorzystuje się normę L^2). Istnieje również problem z operatorem pierwiastka Laplasjanu, który nie jest dostatecznie dobrze wyjaśniony, co stanowi uwagę krytyczną. Metody numeryczne zaproponowane w rozprawie są zobrazowane i porównane na przykładach, co pozwala zrozumieć ich zakres stosowalności i skuteczność w praktyce.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
tel.:+48 22 55 44 161
e-mail: p.mucha@mimuw.edu.pl

Rozdział 4 opiera się na pracy [3]. Badane jest równanie falowe, zakładając istnienie rozwiązań w klasie $C^2([0,T];H^s)$ dla odpowiednio dużego s, większego od 6. Istota tego rozdziału koncentruje się wokół przybliżeń operatora rozwiązania. W ogólności mamy do czynienia z funkcją wykładniczą całki z macierzy. Problemem jest, że w ogólności nie mamy wzoru $e^{A+B} \neq e^A e^B$ dla macierzy niekomutujących. Wyrażenia tego rodzaju naturalnie pojawiają się w obliczeniach operatora rozwiązania. Aby rozwiązać ten problem, autorka rozważa rozwinięcie Magnusa, wykorzystując odpowiednie przybliżenie. Zastosowany jest tzw. splitting Stranga $e^{A+B} \approx e^{1/2B} e^A e^{1/2B}$. Następnie autorka definiuje algorytm rozwiązujący równanie i analizuje błąd. W podsumowaniu otrzymujemy błąd postaci

$$O(h^5 + \min\{h^3, h^2/\omega_{\min}, h^5\omega_{\max}^2\}), \qquad (E1)$$

oraz dla braku oscylacji:

$$O(\min\{h^3, h^2/\omega_{\min}, h^5\omega_{\max}^2\}). \qquad (E2)$$

Wyniki te poprawiają znane rezultaty (Bander, Condon et al.). Następnie następuje wyczerpujące porównanie metod:

– BBCK [4]: metoda 4. rzędu z pracy [Bader et al., 2019];
– BBCK[6]: metoda 6. rzędu z pracy [Bader et al., 2019];
– Asympt[3]: metoda asymptotyczna 3. rzędu z pracy [Condon et al., 2021], Rozdział 2;
– metoda 3 rzędu z pracy [Kropielnicka and Lademann, 2022], Rozdział 3.

dla czterech przykładów jedno- i dwuwymiarowych o różnej strukturze oscylacji w czasie funkcji masy.

Dołączono także dodatek z wyliczeniami rozwinięć dla rachunku macierzowego. Doktorat kończy się podsumowaniem i kilkoma zdaniem na temat możliwych kierunków badań.

W skrócie: Pierwszy wynik ilustruje metodę asymptotyczną stosowaną dla funkcji f charakteryzującej się wysokimi oscylacjami. Symulacje wykazują lepsze zbieżności w porównaniu do dotychczasowych technik. Niestety, ta metoda działa tylko dla bardzo szczególnej postaci $f(t) \sim a(x)e^{i\omega t}$, przy dużych wartościach parametru ω. Drugi wynik prezentuje metodę o rzędzie trzecim, niezależną od oscylacji. Metoda ta analizuje rozwiązania w postaci wzoru dla równania falowego, gdzie składnik $f\phi$ jest traktowany jako „zaburzenie" lub „prawa strona" równania. Głównym celem jest stworzenie podejścia, które nie jest podatne na wpływ wielkości oscylacji. Aby zminimalizować błąd, Autorka korzysta z metody Filona do dokładnej aproksymacji całek o wysokiej częstotliwości. Przedstawione są dowody zbieżności metody wraz z dokładnym oszacowaniem błędu. Ostatni wynik posuwa się krok dalej, traktując rozwiązanie jako rozwiązanie równania jednorodnego, co pozwala zapisać je w postaci $z(t) = R(t,t_0)z(0)$. W celu wyznaczenia operatora rozwiązania wykorzystywane jest rozwinięcie Magnusa w kontekście dekompozycji Stranga i Chin-Chen. Dzięki temu można udowodnić, że błąd ma postać (E1) lub (E2). Wszystkie te wyniki dotyczą rozwiązań należących do klasy H^{6+}.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
tel.:+48 22 55 44 161
e-mail: p.mucha@mimuw.edu.pl

Uwagi krytycznie: to przede wszystkim format, bardzo kompaktowy, nawet ta uwaga dotyczy rysunków, takie podejście jest naturalne w publikacjach, a nie doktoratach. Ubogie opisu i zbyt krótki autoreferat. Z uwag merytorycznych, to główna uwaga dotyczy regularności po przestrzeni. Nie wszystkie normy są zdefiniowane, a uwaga na temat przybliżania operatora Laplacea, powinna być rozbudowana i opisana przed głównymi wynikami, a nie w środku dowodu. Z mojej perspektywy jest to dość poważne uchybienie. Wydaje mi się, że wynika to z żargonu charakterystycznego dla grupy z której wywodzi się Promotor.

Podsumowując, rozprawa doktorska pani Karoliny Lademann przedstawia ważne badania z zakresu numerycznej aproksymacji liniowego równania Kleina-Gordona z masą czasowo- i przestrzenno-zależną. Praca opiera się na istotnych artykułach naukowych i prezentuje wartościowe wyniki, uogólniając i poprawiając znanne wyniki Bader, Blanes, Casas, Kopylov, Condon, Deano, Iserles. Z mojego punkty widzenia wartość rozprawy mogłaby wzrosnąć po dokonianiu niektórych usprawnień i dokładniejszego opisu w niektórych fragmentach. Moim zdaniem, rozprawa wnosi istotny wkład w dziedzinie badań, związanych z tym równaniem.

Stwierdzam, że zostały spełnione wszystkie warunki określone w art. 186 i art. 187 Ustawy o Szkolnictwie Wyższym i Nauce (Dz. U. 2021, Poz. 478) dla nadania stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka. Opowiadam się za przyjęciem dysertacji oraz dopuszczeniem Kandydatki do dalszych etapów wszczętego przewodu doktorskiego.

Piotr Mucha

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
tel.:+48 22 55 44 161
e-mail: p.mucha@mimuw.edu.pl